Exercice 1 : Sous-espaces vectoriels (s-ev)

Un rappel pour commencer : F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- F est non vide,
- F est stable par combinaisons linéaires.

Dans la pratique :

- On vérifie que le vecteur nul de E appartient à F,
- on pose $u, v \in F$, et $\lambda \in \mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), et on montre que $w = \lambda u + v \in F$.

1. $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4,\ x - y + z + t = 0\}$
   - Le vecteur nul $(0, 0, 0, 0)$ de $\mathbf{C}^4$ appartient à E_1 car $0 - 0 + 0 + 0 = 0$.
   - Soient $u = (x, y, z, t), v = (x', y', z', t') \in E_1$, soit $\lambda \in \mathbf{C}$.

   On pose $w = \lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$.
   Alors $\Lambda = (\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z') + (\lambda t + t') = \lambda(x - y + z + t) + (x' - y' + z' + t')$
   avec $x - y + z + t = 0$ car $u \in E_1$, et $x' - y' + z' + t' = 0$ car $v \in E_1$.
   Ainsi $\Lambda = \lambda \times 0 + 0 = 0$ ce qui prouve que $w \in E_1$.
   Conclusion : E_1 est non vide et stable par combinaisons linéaires. $\boxed{E_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbf{C}^4.}$
2. $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4,\ x - y + z + t = 1\}$

   Le vecteur nul $(0, 0, 0, 0)$ n'appartient pas à E_2 car $0-0+0+0 \neq 1$, donc $\boxed{E_2 \text{ n'est pas un s-ev de } \mathbf{C}^4.}$
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4,\ x = y = 0\}$
   - Le vecteur nul $(0, 0, 0, 0)$ appartient évidemment à E_3.
   - Soient $u, v \in E_3$, soit $\lambda \in \mathbf{C}$. On pose $w = \lambda u + v$.

   On a alors : $u = (0, 0, z, t)$ et $v = (0, 0, z', t')$ donc $w = (0, 0, \lambda z + z', \lambda t + t')$.
   Ainsi $w \in E_3$, donc E_3 est stable par combinaisons linéaires. $\boxed{E_3 \text{ est un s-ev de } \mathbf{C}^4.}$
4. $E_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4,\ x = 0 \text{ ou } y = 0\}$

   Remarque : $x = 0$ ou $y = 0$ équivaut dans $\mathbf{C}$ à $xy = 0$.
   Posons $u = (1, 0, 0, 0)$ et $v = (0, 1, 0, 0)$. Alors u et v appartiennent à E_4, car le produit de leurs deux premières coordonnées est nul ($1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$).
   Mais $u + v = (1, 1, 0, 0) \notin E_4$ car $1 \times 1 \neq 0$. Ainsi, E_4 n'est pas stable par combinaisons linéaires.
   $\boxed{E_4 \text{ n'est pas un s-ev de } \mathbf{C}^4.}$

*Remarque pour les questions **3** et **4*** :
On pose $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4,\ x = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4,\ y = 0\}$.
Alors par définition : $E_3 = F \cap G$, et $E_4 = F \cup G$.
Il est très simple de voir que F et G sont des s-ev de $\mathbf{C}^4$.
D'après le cours : **toute intersection de s-ev est encore un s-ev**, donc E_3 est un s-ev,
mais en général, l'union de s-ev n'est pas un s-ev.

Exercice 2 : S-ev et parties génératrices

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ |x| = |z|\}$.

   Posons $u = (1, 0, -1)$ et $v = (1, 0, 1)$. Alors $u, v \in A$ mais $u + v = (2, 0, 0) \notin A$.
   A n'est donc pas stable par combinaisons linéaires : $\boxed{A \text{ n'est pas un s-ev de } \mathbf{R}^3.}$
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x = -y = 2z\}$.
   - Le vecteur nul $(0, 0, 0)$ de $\mathbf{R}^3$ appartient à B.
   - Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux éléments de B. Soit λ un réel.

   On pose $w = \lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (x'', y'', z'')$.
   Alors $\lambda x + x' = \lambda(-y) + (-y') = -(\lambda y + y')$ donc $x'' = -y''$.
   De plus, $\lambda x + x' = \lambda(2z) + (2z') = 2(\lambda z + z')$ donc $x'' = 2z''$.
   Ainsi, $w \in B$, qui est donc stable par combinaisons linéaires. $\boxed{B \text{ est un s-ev de } \mathbf{R}^3.}$

Recherche d'une partie génératrice de B : on manipule un peu sa définition.
$B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x = 2z \text{ et } y = -2z\} = \{(2z,-2z,z) \in \mathbf{R}^3,\ z \in \mathbf{R}\} = \{z(2,-2,1),\ z \in \mathbf{R}\}$.
On pose le vecteur $u = (2,-2,1) \in \mathbf{R}^3$.
Alors on vient d'écrire que B est l'ensemble des vecteurs colinéaires à u : $B = \{zu,\ z \in \mathbf{R}\}$.
$\boxed{B \text{ est la droite vectorielle engendrée par } u = (2,-2,1).}$
Une partie génératrice de B sera par exemple $\{u\}$.
Remarque : on peut aussi répondre $\{-u\}$, ou $\{2u\}$ ...

3. $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
   $u = (1,0,1)$ et $v = (0,1,1)$ appartiennent à C, mais $u+v = (1,1,2) \notin C$. $\boxed{C \text{ n'est pas un s-ev de } \mathbf{R}^3.}$
4. $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x = y \text{ ou } x = 2y\}$.
   D est l'union de deux s-ev (voir la remarque exercice **1**).
   $u = (2,1)$ et $v = (1,1)$ appartiennent à D, mais $u + v = (3,2) \notin D$. $\boxed{D \text{ n'est pas un s-ev de } \mathbf{R}^2.}$
5. $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$.
   $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x = 2y - 3z\} = \{(2y-3z,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ y,z \in \mathbf{R}\}$
   $E = \{y(2,1,0) + z(-3,0,1),\ y,z \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}(u,v)$ en posant $u = (2,1,0)$ et $v = (-3,0,1)$.
   E est donc le s-ev engendré par u, v. Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc libres.
   En conséquence, (u,v) forme une base de E : $\boxed{E \text{ un s-ev de } \mathbf{R}^3, \text{ de base } (u,v), \text{ et de dimension } 2.}$
6. $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x = 0\}$.
   $F = \{(0,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ y,z \in \mathbf{R}\} = \{y(0,1,0) + z(0,0,1),\ y,z \in \mathbf{R}\}$.
   On pose $j = (0,1,0)$ et $k = (0,0,1)$, non colinéaires : $\boxed{F \text{ est un s-ev de } \mathbf{R}^3, \text{ de base } (j,k), \text{ et de dimension } 2.}$

Exercice 3 : Un s-ev de $\mathbf{R}^5$.

$F = \{(x,y,z,t,u),\quad x + 2y + 3z + t - u = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y + z + t + u = 0\}$.
La technique est d'exprimer certaines coordonnées en fonction des autres, donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t - u = 0 \\ x + 2y + z + t + u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + t - u = 0 \\ \qquad\quad -2z \quad + 2u = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z - t + u \\ z = u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - t - 2u \\ z = u \end{cases}$$

On a obtenu un système de rang 2, donc 2 inconnues principales (x et z) et 3 variables libres (y, t et u).
On remplace alors les inconnues principales dans la définition de F :
$F = \{(-2y - t - 2u, y, u, t, u),\ (y,t,u) \in \mathbf{R}^3\}$
$\ \ = \{y(-2,1,0,0,0) + t(-1,0,0,1,0) + u(-2,0,1,0,1),\ (y,t,u) \in \mathbf{R}^3\}$
On pose $v_1 = (-2,1,0,0,0)$, $v_2 = (-1,0,0,1,0)$ et $v_3 = (-2,0,1,0,1)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^5$.
On vient d'écrire que : $F = \{yv_1 + tv_2 + uv_3,\ (y,t,u) \in \mathbf{R}^3\}$
c'est-à-dire que F est l'ensemble des combinaisons linéaires de v_1, v_2 et v_3. $\boxed{F = \text{Vect}(v_1,v_2,v_3) \text{ est un s-ev de } \mathbf{R}^5.}$
La famille (v_1, v_2, v_3) est génératrice de F. Montrons qu'elle est libre.
Puisqu'elle contient plus de 2 vecteurs, **il ne suffit pas de dire que ces vecteurs sont non colinéaires.**
Il faut utiliser la technique vue en cours : on montre que la seule combinaison linéaire nulle de ces 3 vecteurs est la combinaison linéaire triviale (*ie* : $0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = (0,0,0,0,0)$).
Soient a, b, c trois réels tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0,0,0)$. Montrons que : $a = b = c = 0$.

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b - 2c = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. Puisqu'elle engendre F, $\boxed{(v_1,v_2,v_3) \text{ est une base de } F.}$
Cette base contient 3 vecteurs donc $\boxed{\dim(F) = 3.}$
Remarque : dans la résolution du premier système, on avait le choix pour les inconnues principales et les variables libres. Un autre choix aurait donné une autre base de F, contenant elle aussi 3 vecteurs.

Exercice 4 : Base et système d'équations cartésiennes d'un s-ev

$E = \{(a+2b, -a+3b, a, b) \in \mathbf{C}^4,\ a, b \in \mathbf{C}\}$
$\quad = \{(a, -a, a, 0) + (2b, 3b, 0, b),\ a, b \in \mathbf{C}\} = \{a(1, -1, 1, 0) + b(2, 3, 0, 1),\ a, b \in \mathbf{C}\}$

On pose $u = (1, -1, 1, 0)$ et $v = (2, 3, 0, 1)$ dans $\mathbf{C}^4$. Alors $\boxed{E = \mathrm{Vect}(u, v)}$
ce qui prouve que E est un s-ev de $\mathbf{C}^4$, et que (u, v) en est une partie génératrice.
u, v ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre : $\boxed{(u, v) \text{ est une base de } E, \text{ et } \dim(E) = 2.}$

Système d'équations cartésiennes de E.
Des équations sont dites *cartésiennes* lorsqu'elles ne font figurer que les coordonnées x, y, z, t des vecteurs, par opposition aux équations *paramétriques*, où un ou plusieurs paramètres (comme ici a, b) interviennent.

L'énoncé donne un système d'équations paramétriques de E : $\begin{cases} x = a + 2b \\ y = -a + 3b \\ z = a \\ t = b \end{cases}$, $\quad a, b \in \mathbf{C}$.

La question est donc d'éliminer les paramètres dans ce système, ce qui est immédiat :

$$\begin{cases} x = z + 2t \\ y = -z + 3t \\ z = z \\ t = t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = z + 2t \\ y = -z + 3t \end{cases}}$$

Exercice 5 : Où il est question de liberté

1. $\mathcal{F} = (u, v, w)$ avec $u = (1, 0, 1)$, $v = (2, 0, 1)$, $w = (0, -1, 2) \in \mathbf{R}^3$.
   Soient a, b, c trois réels tels que $au + bv + cw = 0_{\mathbf{R}^3} = (0, 0, 0)$. On a alors :
   $$au + bv + cw = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$
   La seule combinaison linéaire nulle des vecteurs u, v, w est la combinaison linéaire triviale.
   $\boxed{(u, v, w) \text{ est donc une famille libre.}}$
2. $\mathcal{F}$ une famille de cardinal 3 dans $\mathbf{R}^2$
   $\dim(\mathbf{R}^2) = 2$ donc $\mathrm{card}(\mathcal{F}) > \dim(\mathbf{R}^2)$. $\quad \boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ n'est pas libre dans } \mathbf{R}^2.}$

Exercice 6 : Une famille dérivée d'une famille libre

On pose $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 + e_3$, $w = e_2 + e_3 \in \mathbf{K}^n$.
Soient a, b, c trois scalaires tels que : $au + bv + cw = 0_{\mathbf{K}^n}$.
Alors on a : $a(e_1 + e_2) + b(e_1 + e_3) + c(e_2 + e_3) = 0_{\mathbf{K}^n}$, soit : $(a+b)e_1 + (a+c)e_2 + (b+c)e_3 = 0_{\mathbf{K}^n}$.
Puisque la famille (e_1, e_2, e_3) est supposée libre dans $\mathbf{K}^n$, alors nécessairement : $a + b = a + c = b + c = 0$.
On résout ce système, et on trouve : $a = b = c = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (u, v, w) \text{ est libre dans } \mathbf{K}^n.}$

Exercice 7 : Coordonnées dans une nouvelle base

1. $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
   La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est de cardinal 3, et $\dim(\mathbf{R}^3) = 3$, donc :
   $$\mathcal{B} \text{ base} \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ est libre} \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ est génératrice.}$$
   Montrons que $\mathcal{B}$ est libre, en étudiant le rang de sa matrice canoniquement associée.
   Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
   On peut se contenter d'échelonner cette matrice P et trouver le nombre de pivots.
   En prévision de la question suivante, on va chercher à l'inverser :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

on a 3 pivots : $\text{rg}(P) = 3$ donc P est inversible et $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$

$$\ldots \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \text{ donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Coordonnées de $v = (1, 2, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$

   Soit C la matrice-colonne canoniquement associée au vecteur v, et soit C' la matrice-colonne de ce même vecteur v relativement à la base $\mathcal{B}$.

   D'après la formule de changement de base : $C = PC'$, ou encore $C' = P^{-1}C$.

   On a : $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, il suffit de calculer $P^{-1}C = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   Dans la base $\mathcal{B}$, le vecteur v a pour coordonnées $(-2, -1, 4)$, c'est-à-dire : $\boxed{v = -2u_1 - u_2 + 4u_3.}$

Exercice 8 : Toute famille libre peut se compléter en une base.

1. $\mathcal{F}$ est une famille libre.

   Les 2 vecteurs constituant $\mathcal{F}$ sont clairement non colinéaires, donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une famille libre de } \mathbf{R}^3.}$

2. Construire une base en complétant $\mathcal{F}$

   Nommons $u = (1, 1, -1)$ et $v = (1, 2, 1)$.

   Il y a de nombreuses manières de faire. On peut essayer au hasard, en posant par exemple $i = (1, 0, 0)$ (le premier vecteur de la base canonique) et en vérifiant si $\text{rg}(u, v, w) = 3$, ce qui est assez immédiat. Si par malheur on trouve un rang de 2, alors on prend $j = (0, 1, 0)$ le deuxième vecteur de la base canonique, et on essaie à nouveau... En cas d'échec, alors $k = (0, 0, 1)$ conviendra.

Exercice 9 : Égalité de deux s-ev

En général, on peut montrer l'égalité de deux ensembles par **double-inclusion** :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

Lorsqu'on travaille avec des s-ev, on peut aussi considérer les dimensions :
Soient F_1 et F_2 deux s-ev d'un même espace vectoriel, tels que $\dim(F_1) = \dim(F_2)$.
Alors : $F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow F_2 \subset F_1 \Leftrightarrow F_1 = F_2$.
Ce qui donne ici : Soient $F_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $F_2 = \text{Vect}(v_1, v_2)$.
u_1, u_2 sont non colinéaires, donc ils forment une famille libre.
De plus, par définition, (u_1, u_2) engendre F_1 donc (u_1, u_2) est une famille génératrice de F_1.
Étant libre et génératrice de F_1, la famille (u_1, u_2) est une base de F_1.
$\text{card}(u_1, u_2) = 2$ donc $\dim(F_1) = 2$.
De même, v_1, v_2 sont non colinéaires donc ... donc $\dim(F_2) = 2$.
F_1 et F_2 ont même dimension, il suffit donc de montrer que l'un est inclus dans l'autre.
Remarque : F_1 et F_2 sont des plans vectoriels de l'espace $\mathbf{R}^3$.

Cherchons $a, b \in \mathbf{R}$ tels que : $u_1 = av_1 + bv_2$. On doit résoudre : $\begin{cases} 3a + 5b = 2 \\ 7a = 3 \\ -7b = -1 \end{cases}$

ce qui donne immédiatement : $a = \dfrac{3}{7}$, $b = \dfrac{1}{7}$, soit $u_1 = \dfrac{3}{7}v_1 + \dfrac{1}{7}v_2$.

Cherchons $c, d \in \mathbf{R}$ tels que : $u_2 = cv_1 + dv_2$. On doit résoudre : $\begin{cases} 3c + 5d = 1 \\ 7c = -1 \\ -7d = -2 \end{cases}$

ce qui donne immédiatement : $c = -\dfrac{1}{7}$, $d = \dfrac{2}{7}$, soit $u_2 = -\dfrac{1}{7}v_1 + \dfrac{2}{7}v_2$.
u_1, u_2 sont des combinaisons linéaires de v_1, v_2, donc par définition : $u_1, u_2 \in F_2$.
D'après le cours, on en déduit : $\text{Vect}(u_1, u_2) \subset F_2$, c'est-à-dire $F_1 \subset F_2$.
Vu l'égalité des dimensions, on peut conclure : $\boxed{\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2).}$

Autre méthode (mais avec plus de calculs) : on détermine une équation cartésienne de chacun des plans F_1 et F_2, puis on montre que ces équations sont équivalentes.
On doit alors trouver une équation équivalente à : $7x - 3y + 5z = 0$.

Exercice 10 : Dimension d'un s-ev

$F = \text{Vect}(u, v, w)$ est un s-ev de $\mathbf{R}^3$, donc de dimension $d \in [\![0, 3]\!]$.
Puisque u, v sont non colinéaires, $\dim(F) \geqslant 2$. On a donc $\dim(F) = 2$ ou 3.
$\dim(F) = 3 \Leftrightarrow F = \mathbf{R}^3 \Leftrightarrow (u, v, w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
En revanche si $\dim(F) = 2$, alors (u, v) est une base de F (famille libre et de cardinal 2).
Il suffit donc de s'intéresser au rang de la matrice M canoniquement associée à la famille (u, v, w) :
• si $\text{rg}(M) = 2$, alors F est de dimension 2 et de base (u, v),
• si $\text{rg}(M) = 3$, alors $F = \mathbf{R}^3$, de base (u, v, w) (ou encore : de base canonique).

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Conclusion : $\boxed{F \text{ est de dimension 2, et de base } (u, v).}$

Exercice 11 : Intersection de deux hyperplans de $\mathbf{R}^4$

1. <u>(u, v, w) n'est pas une base de $\mathbf{R}^4$</u> car $\dim(\mathbf{R}^4) = 4$, alors que $\text{card}(u, v, w) = 3$.
2. <u>Équation cartésienne de $E = \text{Vect}(u, v, w)$</u>

   $(x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbf{R},\ (x, y, z, t) = au + bv + cw \Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbf{R},\ \begin{cases} x = a + b + c \\ y = a \\ z = -c \\ t = -a - b \end{cases}$

   On vient d'écrire un **système d'équations paramétriques** de F (les réels a, b, c sont les paramètres).
   Il faut éliminer les paramètres pour obtenir une (ou des) équation(s) cartésienne(s).
   C'est rapide ici, puisque $a = y$ et $c = -z$, il reste : $\begin{cases} x = y + b - z \\ t = -y - b \end{cases}$ donc $b = -y - t$

   et finalement : $\boxed{E \text{ a pour équation cartésienne } x + z + t = 0.}$
3. <u>F d'équation $x + y - z + t = 0$ est un s-ev de $\mathbf{R}^4$</u>
   L'équation définissant F est linéaire et homogène. F est donc un s-ev de $\mathbf{R}^4$.
4. <u>Base de $E \cap F$</u>
   Soit $G = E \cap F$. Alors G est un s-ev de $\mathbf{R}^4$ en tant qu'intersection de deux s-ev.
   G a pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases} \quad (S)$

   On résout ce système : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - t \\ y = 2z \end{cases}$

   On a exprimé x, y (inconnues principales) en fonction de z, t (variables libres).
   On peut choisir arbitrairement : $z = 1, t = 0$, qui donne $v_1 = (-1, 2, 1, 0)$, puis $z = 0, t = 1$, qui donne $v_2 = (-1, 0, 0, 1)$.
   v_1 et v_2 sont deux vecteurs non colinéaires de G. Ainsi, $\dim(G) \geqslant 2$.
   E et F sont différents de $\mathbf{R}^4$, donc $\dim(E) \leqslant 3$ et $\dim(F) \leqslant 3$.
   Par ailleurs, $G \neq E$ et $G \neq F$, car $E \not\subset F$ ni $F \not\subset E$, donc $\dim(G) < \dim(E)$ et $\dim(G) < \dim(F)$.
   On a donc : $2 \leqslant \dim(G) < \dim(E) < \dim(\mathbf{R}^4) = 4$, et $2 \leqslant \dim(G) < \dim(F) < 4$.
   La seule possibilité est donc : $\dim(G) = 2$, $\dim(E) = \dim(F) = 3$.
   (v_1, v_2) est libre dans G, et de cardinal 2. Conclusion : $\boxed{(v_1, v_2) \text{ est une base de } G.}$

Exercice 12 : Rang d'une famille de vecteurs paramétrés

Les deux questions n'en sont qu'une seule : soit r le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4).
Alors $r = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4))$ et (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre si et seulement si $r = 4$.
Il suffit donc d'étudier la valeur de r selon la valeur du paramètre m.
Soit M_m la matrice canoniquement associée à (u_1, u_2, u_3, u_4).

$M_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$. On a donc :

$\text{rg}(M_m) = \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix}$ puis $L_4 \leftarrow L_4 + L_2 + L_3$:

$\text{rg}(M_m) = \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & 3-2m-m^2 \end{pmatrix}$

<u>Premier cas : $m = 1$</u> Alors $\text{rg}(M_1) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$.

<u>Deuxième cas : $m \neq 1$</u> alors $m - 1$ est un pivot.

On échange L_2 et L_3 : $\text{rg}(M_m) = \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & m \\ 0 & \boxed{m-1} & 0 & 1-m \\ 0 & 0 & \boxed{m-1} & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & 3-2m-m^2 \end{pmatrix}$

On résout : $3 - 2m - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -3$.

$*$ <u>premier sous-cas : $m = -3$</u>

Alors $\text{rg}(M_{-3}) = \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{-4} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$

$*$ <u>deuxième sous-cas : $m \neq -3$</u> Alors on a quatre pivots, donc $\text{rg}(M_m) = 4$.

Conclusion :

Si $m \in \mathbf{R} \setminus \{1, -3\}$, alors u_1, u_2, u_3, u_4 sont linéairement indépendants (*ie* : libres), si $m = 1$, alors $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est de dimension 1, si $m = -3$, alors $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est de dimension 3.

Exercice 13 : Trop de vecteurs ? Famille liée !

$\dim(\mathbf{R}^4) = 4$ donc toute famille de cardinal strictement plus grand que 4 est liée.

Exercice 14 :

1. $\boxed{\dim(F) = 2}$: car u et v sont non colinéaires. Ils forment une base de F.
2. $\boxed{\dim(G) = 2}$: car v et w sont non colinéaires.
3. <u>$\text{Vect}(v) \subset F \cap G \subset F$.</u>
   $F \cap G \subset F$ est vrai quels que soient les ensembles F et G.
   $v \in F$ donc $\text{Vect}(v) \subset F$. De même, $v \in G$ donc $\text{Vect}(v) \subset G$.
   On en déduit que $\text{Vect}(v) \subset F \cap G$.
4. <u>Dimensions possibles de $F \cap G$</u>
   Vu les inclusions précédentes, $\dim(\text{Vect}(v)) \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \dim(F)$.
   On obtient donc : $\boxed{1 \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant 2.}$

5. <u>$u \notin G$</u>
$u \in G \Leftrightarrow u$ est combinaison linéaire de v, w, donc si et seulement si : $\exists a, b \in \mathbf{R},\ u = av + bw$.
$$u = av + bw \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a + b \\ 1 = -2a + 3b \\ 1 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ -2 = 1 \end{cases} \text{ : système incompatible.}$$
Donc u n'est pas combinaison linéaire de v, w, donc $\boxed{u \notin G.}$

6. <u>Base de $F \cap G$</u>
$u \notin G$ montre que $F \not\subset G$ donc que $F \cap G \neq F$. Ainsi $\dim(F \cap G) < \dim(F)$, donc $\boxed{\dim(F \cap G) = 1.}$
Or $\mathrm{Vect}(v) \subset F \cap G$ et $\dim(\mathrm{Vect}(v)) = 1$, donc $\boxed{F \cap G = \mathrm{Vect}(v), \quad \text{de base } \{v\}.}$

Exercice 15 : Intersection de trois s-ev

1. <u>Représentation paramétrique puis cartésienne de F</u>
Soient $u_1 = (-3, 2, 1), u_2 = (-5, 3, 2) \in \mathbf{R}^3$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
$F = \{\lambda u_1 + \mu u_2,\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} = \{(-3\lambda - 5\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda + 2\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$
F est donc défini par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = -3\lambda - 5\mu \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$
On élimine les paramètres λ, μ pour trouver une équation cartésienne de F :
$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = z \\ 2\lambda + 3\mu = y \\ -3\lambda - 5\mu = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = z \\ -\mu = y - 2z \\ \mu = x + 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = z \\ -\mu = y - 2z \\ 0 = x + y + z \end{cases}$$
Ce système est compatible lorsque l'équation auxiliaire est vérifiée,
donc $\boxed{F \text{ a pour équation cartésienne : } x + y + z = 0.}$
On pose $u = (a, 1, 1)$ avec $a \in \mathbf{R}$. Alors $u \in F \Leftrightarrow a + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

2. (a) $u = (-2, 1, 1) \in G$ car $2(-2) - 1 + 5 = 0$ et $u \in H$ car $-2 - 1 + 3 = 0$.

(b) $$(S) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$$

(c) Le système (S) est un système d'équations cartésiennes de $F \cap G \cap H$. On a donc :
$F \cap G \cap H = \left\{(-2z, z, z) \in \mathbf{R}^3, z \in \mathbf{R}\right\} = \left\{z(-2, 1, 1) \in \mathbf{R}^3, z \in \mathbf{R}\right\} = \mathrm{Vect}(-2, 1, 1)$
En conclusion : $\boxed{F \cap G \cap H = \mathrm{Vect}(u).}$