Correction du Devoir Maison n°6

Exercice 1 : Une suite de fonctions

Partie I : Étude des fonctions f_n

1. a. Continuité sur $\mathbf{R}^\star$:

$\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $\boxed{f_n \text{ est continue sur } \mathbf{R}^\star}$ par opérations.

b. Continuité en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{n}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f(0)$ et f_n est continue à droite en 0.

Par ailleurs, $\forall x < 0$, $f_n(x) = n \times \dfrac{x}{n}\exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) = n \times \dfrac{1}{Xe^X}$ en posant $X = \dfrac{n}{x}$.

Or : $\lim\limits_{x\to 0^-} X = -\infty$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to-\infty} \dfrac{n}{Xe^X} = -\infty$.

$\boxed{\textit{Conclusion} : f_n \text{ est continue à droite en 0 mais pas à gauche.}}$

c. Limites à l'infini :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) = e^0 = 1$ par composée de limites.

Donc par opérations : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty.}$

2. Δ_n asymptote à $\mathcal{C}_n$:

On doit ici prouver : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - x + n) = \lim\limits_{x\to-\infty} (f_n(x) - x + n) = 0$.

Or $\forall x \neq 0$, $f_n(x) - x + n = x\exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) - x + n = x\left(\exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) - 1\right) + n$

Et $\left(\exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) - 1\right) \underset{\pm\infty}{\sim} -\dfrac{n}{x}$ car $-\dfrac{n}{x}$ tend vers 0.

Donc $x\left(\exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) - 1\right) \underset{\pm\infty}{\sim} -n$, donc tend vers $-n$.

Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - x + n) = \lim\limits_{x\to-\infty} (f_n(x) - x + n) = 0$.

$\boxed{\textit{Conclusion} : \text{La droite } \Delta_n \text{ est asymptote oblique à } \mathcal{C}_n \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty.}$

3. Dérivée de f_n :

f_n est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ par opérations sur des fonctions dérivables et :

$\forall x \neq 0$, $f_n'(x) = \exp\left(-\dfrac{n}{x}\right) + x \times \dfrac{n}{x^2}\exp\left(-\dfrac{n}{x}\right)$.

$\boxed{\textit{Conclusion} : \forall x \in \mathbf{R}^\star,\ f_n'(x) = \left(1 + \dfrac{n}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{n}{x}\right).}$

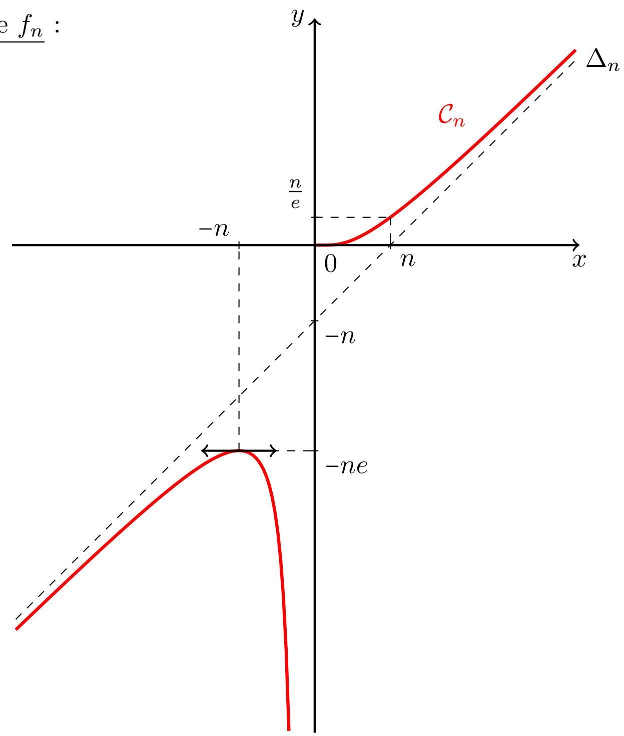
4. Tableau de variations de f_n :

$f_n'(x)$ a même signe que $1 + \dfrac{n}{x}$. Donc $f'(x) > 0 \iff \dfrac{x+n}{x} > 0$.

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$-ne$	$\searrow$	$-\infty \Vert 0$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Courbe de f_n :



Partie II : Étude d'une suite implicite

6. Existence et unicité de u_n :

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. D'après le tableau de variations de f_n, on a : $\forall x \leqslant 0,\ f_n(x) \leqslant 0$ donc l'équation (E_n) n'a pas de solution sur $\mathbf{R}_-$.

Sur $\mathbf{R}_+^\star$, f_n est continue et strictement croissante.

Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}_+^\star$ dans $f_n(\mathbf{R}_+^\star) = \mathbf{R}_+^\star$.

D'après le théorème de la bijection :

$\forall \alpha > 0,\ f_n(x) = \alpha$ possède une unique solution dans $\mathbf{R}_+^\star$. En particulier :

$\boxed{\text{l'équation } (E_n) : f_n(x) = 1 \text{ possède une unique solution réelle } u_n, \text{ et } u_n \in \mathbf{R}_+^\star.}$

7. $\forall n \geqslant 1,\ u_n > 1$:

Soit $n \geqslant 1$. Alors $f_n(1) = \exp(-n) < 1$, donc $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n > 1.}$

8. a. Un calcul utile :

Soit $x \neq 0$. Alors $\dfrac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = \dfrac{xe^{-\frac{n}{x}}}{xe^{-\frac{n+1}{x}}} = e^{-\frac{n}{x}} e^{\frac{n+1}{x}}$ donc $\boxed{\forall x \neq 0,\ \dfrac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = e^{\frac{1}{x}}.}$

b. Expression de $f_n(u_{n+1})$:

D'après la question précédente, en choisissant $x = u_{n+1}$ (non nul car supérieur à 1) :

$$\frac{f_n(u_{n+1})}{f_{n+1}(u_{n+1})} = \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

Mais par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$, donc il reste : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ f_n(u_{n+1}) = \exp\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right).}$

c. Monotonie de (u_n) :

$\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} > 0$ donc $\exp\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right) > 1$. Ainsi, $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ donc $u_{n+1} > u_n$.

$\boxed{\textit{Conclusion} : \text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

9. a. g réalise une bijection :

g est définie et dérivable par opérations sur I et : $\forall x \in I,\ g'(x) = 1 + \ln(x) > 0$ donc g est strictement croissante et continue sur I.

$g(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ donc $\boxed{g \text{ réalise une bijection de } I \text{ vers } J = \mathbf{R}_+.}$

b. Tableau de variations de g^{-1} :

g^{-1} est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.

$g^{-1}(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g^{-1}(x) = +\infty$. On a le tableau de variations ci-après :

x	0	$+\infty$
g^{-1}	1 $\nearrow$	$+\infty$

10. Une équation équivalente à (E_n) :

Soit $x > 0$. Alors x est solution de (E_n) si et seulement si :

$$f_n(x) = 1 \Leftrightarrow x\exp\left(-\frac{n}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{n}{x}\right) \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{n}{x} \Leftrightarrow x\ln(x) = n.$$

$\boxed{\textit{Conclusion} : (E_n) \text{ a le même ensemble-solution que l'équation : } g(x) = n.}$

11. Sens de variations de (u_n) :

D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 1,\ u_n = g^{-1}(n)$. Puisque g^{-1} est strictement croissante, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

12. a. (u_n) diverge :

$\lim\limits_{n \to +\infty} g^{-1}(n) = +\infty$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$

b. Équivalent de $\ln(u_n)$:

Pour tout $n \geqslant 1,\ g(u_n) = n$, *ie* : $u_n \ln(u_n) = n$.

On compose par la fonction ln : $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n) \quad (1)$

On sait que, si $X \to +\infty$, alors $\ln(X) = \mathrm{o}(X)$, car $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$.

On pose $X = \ln(u_n)$, qui tend vers $+\infty$ car (u_n) diverge vers $+\infty$.

Alors : $\ln(\ln(u_n)) = \mathrm{o}(\ln(u_n))$, et par suite : $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) \sim \ln(u_n)$.

La relation (1) permet de conclure : $\boxed{\ln(u_n) \sim \ln(n)}$.

c. Équivalent de (u_n) :

Pour tout $n \geqslant 1,\ u_n \ln(u_n) = n$ donc $u_n = \dfrac{n}{\ln(u_n)}$.

Par quotient d'équivalents : $\boxed{u_n \sim \dfrac{n}{\ln(n)}.}$

Partie III : Suite récurrente associée à f_1

13. a. L'intervalle $[0,1]$ est stable par f_1 :

f_1 est strictement croissante sur $[0,1]$, et on a $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = e^{-1} < 1$ donc $\boxed{\forall x \in [0,1],\ f_1(x) \in [0,1].}$

b. Pour tout n, $x_n \in [0,1]$:

On montre par récurrence que $\mathcal{P}_n$ « $x_n \in [0,1]$ » est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

* Initialisation pour $n = 0$: $\mathcal{P}_0$ est vraie car $x_0 = 1 \in [0,1]$.
* Hérédité à partir de $n = 0$: soit $n \geqslant 0$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors $x_n \in [0,1]$ donc $f_1(x_n) = x_{n+1} \in [0,1]$. $\mathcal{P}_n$ est donc héréditaire à partir de $n = 0$.
* Conclusion : d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Conclusion : $\forall n \geqslant 0,\ x_n \in [0,1]$.

14. Limites possibles de la suite (x_n) :

Supposons (x_n) convergente vers ℓ. Par continuité de la restriction de f_1 à $[0,1]$, on sait alors que $f_1(x_n)$ converge vers $f_1(\ell)$, donc : $\ell = f_1(\ell)$.

On résout cette équation :

$$\ell = f_1(\ell) \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = \ell\exp(-\tfrac{1}{\ell}) \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \exp(-\tfrac{1}{\ell}) = 1 \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \frac{1}{\ell} = 0$$
$$\Leftrightarrow \ell = 0.$$

Conclusion : Si (x_n) converge, alors sa limite est nulle.

15. Monotonie de la suite (x_n) :

Soit $x \in [0,1]$. Alors $\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) < 1$ donc $\boxed{f_1(x) < x.}$ On en déduit que :

pour tout entier $n \geqslant 0$, $x_{n+1} < x_n$ donc la suite (x_n) est strictement décroissante.

16. Nature de la suite (x_n) :

La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc vers $\ell \geqslant 0$.

On a montré que dans ce cas, la seule limite possible est 0.

Conclusion : La suite (x_n) est strictement décroissante et converge vers 0.

17. Fonctions *Python* `SUITE` et `INDICE` :

```
from math import exp
def SUITE(N) :
    L, x = [1], 1
    for _ in range(N) :
        x = x * exp(-1/x)
        L.append(x)
    return L
```

```
def INDICE(epsilon) :
    x, n = 1, 0
    while x >= epsilon :
        x = x * exp(-1/x)
        n += 1
    return n
```