Exercice 1 : Études de dérivabilité

1) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

Par opérations, f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$. *Remarque :* la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
<u>Étude en 0</u> :
Puisqu'on ne peut pas conclure par opérations en 0, il faut revenir à la définition.
On étudie donc le taux d'accroissement de f en 0 : $\Delta_0(h) = \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{h}{1+|h|} = \dfrac{1}{1+|h|}$.
On a : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{1+|h|} = 1$, donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0, et } f'(0) = 1.}$
Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}.}$

2) g définie par trois formules.

Par opérations, g est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$.
<u>Étude en 0</u> : On vérifie d'abord que g est continue en 0 (sinon il est inutile de se demander si elle y est dérivable). g est continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^-} (e^x - 1) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0 = g(0)$.
On écrit le taux d'accroissement en 0 : $\Delta_0(h) = \dfrac{g(h)-g(0)}{h} = \dfrac{g(h)}{h}$ et on étudie sa limite quand $h \to 0$.
Premier cas : $h > 0$. Alors $\Delta_0(h) = \dfrac{h^2 \ln h}{h} = h \ln h$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{h\to 0^+} \Delta_0(h) = 0$.
Deuxième cas : $h < 0$. Alors $\Delta_0(h) = \dfrac{e^h - 1}{h}$. C'est une forme indéterminée... Mais on sait que $e^h - 1 \underset{0}{\sim} h$ donc par quotient : $\Delta_0(h) \underset{0^-}{\sim} \dfrac{h}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{h\to 0^-} \Delta_0(h) = 1$.
Conclusion : $\Delta_0(h)$ possède en 0 une limite à droite et une limite à gauche. Mais ces limites sont différentes : $\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en 0.}}$
Remarque : la courbe représentative de g admet en 0 à droite une demi-tangente horizontale, et en 0 à gauche une demi-tangente de pente 1.

Exercice 2 :

1) <u>Continuité de f</u> :
Par opérations, f est continue sur $\mathbf{R}^\star$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est borné. Donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$

2) <u>Dérivabilité de f</u> :
Par opérations, f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$, et on a : $\boxed{\forall x \neq 0,\ f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right).}$

Dérivabilité en 0 : on écrit le taux d'accroissement de f en 0.
$\Delta_0(h) = \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{h^2 \sin(\frac{1}{h})}{h} = h \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$.
Puisque h tend vers 0, et que $\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$ est borné, on a par produit : $\lim\limits_{h\to 0} h \sin\left(\dfrac{1}{h}\right) = 0$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0.}$

3) <u>Continuité de f'</u> :
On a vu que f' est définie par : $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Par opérations, $\boxed{f' \text{ est continue sur } \mathbf{R}^\star.}$
Étude de la continuité en 0 : Puisque $\sin(\frac{1}{x})$ est borné, on a : $\lim\limits_{x\to 0} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
Mais puisque $\cos(\frac{1}{x})$ diverge en 0, on a par différence : $f'(x)$ diverge en 0.
Ainsi, $\boxed{f' \text{ n'est pas continue en 0.}}$
Remarque : la fonction f de cet exercice est un exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3 :
1) Prolongement continu de f :
$(1+x^2)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(1+x^2)\right)$ est défini en x tel que : $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1+x^2 > 0 \end{cases}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}^\star$.
Par opérations, f est continue sur $\mathbf{R}^\star$.
De plus, $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$ donc par quotient, $\dfrac{1}{x}\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(1+x^2) = 0$, et par composée de limites, $\lim\limits_{0} f = e^0 = 1$.
$\boxed{\text{On peut prolonger } f \text{ en une fonction continue sur } \mathbf{R} \text{ en posant } f(0)=1.}$
On note encore f ce prolongement.
2) Dérivabilité de ce prolongement : Par opérations, f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$.
Étude de la dérivabilité en 0 : On pose $\Delta_0(h) = \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\exp\left(\frac{1}{h}\ln(1+h^2)\right) - 1\right)$.
On a vu que $\dfrac{1}{h}\ln(1+h^2)$ tend vers 0 quand $h \to 0$. En notant t cette quantité, on a :
$\exp(t) - 1 \underset{0}{\sim} t$, donc par quotient : $\Delta_0(h) \underset{0}{\sim} \dfrac{t}{h} = \dfrac{\ln(1+h^2)}{h^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{h^2}{h^2} = 1$
donc $\Delta_0(h)$ tend vers 1 quand h tend vers 0.
Ceci prouve que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0, \text{ avec } f'(0)=1.}$

Exercice 4 : Études de dérivabilité

1. $f(x) = x|x|$.
   Par opérations, f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$.
   Si $x > 0$, alors $f(x) = x^2$ donc $f'(x) = 2x$.
   Si $x < 0$, alors $f(x) = -x^2$ donc $f'(x) = -2x$.
   En 0 : $\Delta_0(h) = \dfrac{h|h|}{h} = |h|$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\Delta_0(h) = 0$.
   Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbf{R} \text{ et pour tout } x \text{ réel, } f'(x) = 2|x|.}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$
   f est définie en x tel que $x^2+2x+2 \geqslant 0$ et dérivable en x tel que $x^2+2x+2 > 0$.
   Rappel : la racine carrée n'est pas dérivable en 0.
   La trinôme x^2+2x+2 possède un discriminant strictement négatif, donc il ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.
   Son coefficient dominant étant positif, on a : $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2+2x+2 > 0$.
   Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbf{R}.}$
   Par règles opératoires sur les dérivées, on trouve : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.}$
3. $f(x) = (\cos x)^3$
   Par opérations, f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$.
   On trouve : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = -3\sin x(\cos x)^2.}$
4. $f(x) = \exp\left(\sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)\right)$
   $\forall x \in \mathbf{R},\ 1+x^2 > 0$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par opérations.
   On trouve : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)\exp\left(\sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)\right).}$
   On a utilisé ensemble les formules, pour u dérivable :
   $(e^u)' = u'e^u, \quad \sin(u)' = u'\cos(u) \quad \text{et} \quad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}.$
5. $f(x) = \sqrt{\ln x}$
   f est définie en x tel que : $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geqslant 0 \end{cases}$ donc $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$.

Puisque la racine carrée n'est pas dérivable en 0, f est dérivable en $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $\ln x > 0$, donc $\boxed{\mathcal{D}_{f'} =]1, +\infty[.}$ On trouve enfin : $\boxed{\forall x > 1,\ f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.}$

6. $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$

   f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et : $\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2}.}$

7. $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$

   f est définie en x tel que $x^2 - x^3 \geqslant 0$, et dérivable en x tel que $x^2 - x^3 > 0$.
   $x^2 - x^3 = x^2(1-x)$ donc est du signe de $(1-x)$ et s'annule en 0.
   Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty, 1] \text{ et dérivable sur }]-\infty, 0[\cup]0, 1[.}$

   On trouve alors : $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_{f'},\ f'(x) = \dfrac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}}.}$

8. $f(x) = |\ln x|$

   f est définie sur $\mathbf{R}_+^\star$, et dérivable en $x > 0$ tel que $\ln x \neq 0$, donc dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
   Si $x > 1$, alors $f(x) = \ln x$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Si $0 < x < 1$, alors $f(x) = -\ln x$ donc $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$.

Exercice 5 : Étude de $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1) <u>f est une bijection</u>

f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par opérations.

On a : $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0.$

f est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Étude des limites : on peut écrire $f(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, ou bien $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Par opérations : $\lim\limits_{-\infty} f = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbf{R}$.

D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbf{R} \text{ dans } f(\mathbf{R}) =]-1, 1[= J.}$

On sait de plus que : $\boxed{f^{-1} \text{ est continue et strictement croissante sur } J.}$

2) <u>Relation entre f' et f</u>.

Pour tout réel x, on a : $1 - f(x)^2 = 1 - \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = f'(x).$

3) <u>Expression de $(f^{-1})'$</u>

f' ne s'annule pas donc f^{-1} est dérivable sur J, et on a :

$\forall x \in J,\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \dfrac{1}{1 - f^2 \circ f^{-1}(x)}$, d'après la question 2)

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}}.$

Exercice 6 : Étude de $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ sur $I = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$

1) <u>f est bijective</u>

f est définie et dérivable sur I par opérations, et : $\forall x \in I,\ f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} \geqslant 0.$

De plus, $\forall x \in I \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\},\ f'(x) > 0.$

Ainsi, f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I.

D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J = f(I) = [1, +\infty[.}$

2) <u>Étude de f^{-1}</u> :

f' s'annule seulement en $x = \dfrac{\pi}{2}$, donc f^{-1} est dérivable sur $K = f\left(I \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) =]1, +\infty[.$

On a : $\forall x \in K,\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = -\dfrac{\sin^2(f^{-1}(x))}{\cos(f^{-1}(x))}$.

Mais pour tout $x \in J,\ f \circ f^{-1}(x) = x$ par définition, donc : $\sin(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{x}$.

Par ailleurs, pour tout t réel, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ donc :

$*$ si $\cos t \geqslant 0,\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ $\quad *$ si $\cos t < 0,\ \cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t}$.

Ici, pour tout $x \in K,\ \dfrac{\pi}{2} < f^{-1}(x) < \pi$ donc $\cos(f^{-1}(x)) < 0$.

On peut donc écrire : $\cos(f^{-1}(x)) = -\sqrt{1-\sin^2(f^{-1}(x))} = -\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$.

Finalement : $(f^{-1})'(x) = -\dfrac{\frac{1}{x^2}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Conclusion : $\boxed{\forall x > 1,\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.}$

Remarque : On peut traiter différemment le problème, en se servant de la fonction Arcsin :

Pour $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$ et $y \geqslant 1$, l'équation $f(x) = y$ se résout en :

$\dfrac{1}{\sin x} = y \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow x = \pi - \text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{y}\right)$

Ainsi on obtient l'expression de f^{-1}, valable sur $[1, +\infty[$: $f^{-1}(y) = \pi - \text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{y}\right)$.

Connaissant la dérivée de la fonction Arcsin : $\forall -1 < t < 1,\ \text{Arcsin}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$,

on obtient : $\forall y > 1,\ (f^{-1})'(y) = -\left(-\dfrac{1}{y^2}\right) \times \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{y})^2}} = \dfrac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$.

Exercice 7 : Équivalent de la série harmonique.

1) <u>Un encadrement utile</u>.

Posons, pour $t > -1$, $f(t) = \ln(1+t) - t$.

Alors f est dérivable par opérations sur $]-1, +\infty[$, et : $\forall t > -1,\ f'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = -\dfrac{t}{1+t}$.

Ainsi, $f' > 0$ sur $]-1, 0[$ et f est strictement croissante sur $]-1, 0]$,

et $f' < 0$ sur $]0, +\infty[$ et f décroît strictement sur $[0, +\infty[$.

f possède donc un maximum strict en $t = 0$, égal à $f(0) = 0$. Ainsi : $\forall t > -1, t \neq 0,\ f(t) < 0$.

Conséquence 1 : on remplace t par $\dfrac{1}{n}$: $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} < 0$

et puisque $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$, on a : $\boxed{\forall n > 0,\ \ln(n+1) - \ln n < \dfrac{1}{n}.}$

Conséquence 2 : on remplace t par $-\dfrac{1}{n+1}$. On obtient :

$\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) < -\dfrac{1}{n+1}$, donc $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) < -\dfrac{1}{n+1}$

d'où : $\ln(n) - \ln(n+1) < -\dfrac{1}{n+1}$ et $\boxed{\forall n > 0,\ \ln(n+1) - \ln n > \dfrac{1}{n+1}.}$

2) <u>Équivalent de la série harmonique</u>

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Vu ce qui précède, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{k} > \ln(k+1) - \ln(k)$ donc en sommant pour k de 1 à n :

$S_n > \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$ (somme télescopique)

De même, $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\dfrac{1}{k} < \ln(k) - \ln(k-1)$, donc en sommant :

Pour $n \geqslant 2$, $S_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)) = 1 + \ln(n) - \ln(1)$ (somme télescopique)

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2,\ \ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n).}$

$\lim \ln(n+1) = +\infty$ donc par comparaison à une suite divergente : $\boxed{(S_n)_n \text{ diverge vers } +\infty.}$

En divisant l'encadrement précédent par $\ln(n)$ lorsque $n \geqslant 2$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} < \frac{S_n}{\ln(n)} < \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)}$$

D'une part : $\dfrac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$ donc tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

D'autre part : $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

donc : $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$ tend également vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure : $\boxed{\lim \dfrac{S_n}{\ln(n)} = 1, \text{ donc } S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).}$

Remarque : on peut retenir ce résultat, en pensant qu'une intégrale est en fait une somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n)$$

Exercice 8 : Encadrement d'Arctan.

Soit $x \in \mathbf{R}_+$. On pose : $f(x) = x - \operatorname{Arctan}(x)$, et on étudie la fonction f.

f est dérivable par opérations, et $\forall x \geqslant 0,\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2} \geqslant 0.$

f est donc croissante sur $\mathbf{R}_+$. De plus, $f(0) = 0$, donc f est positive sur $\mathbf{R}_+$:

$\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0$ soit $\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x.}$

On pose ensuite, pour $x \geqslant 0,\ g(x) = \operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{x}{1+x^2}.$

g est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ par opérations, et $\forall x \geqslant 0,\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}$

$g'(x) = \dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geqslant 0.$

g est donc croissante sur $\mathbf{R}_+$, et $g(0) = 0$ donc g est positive sur $\mathbf{R}_+$:

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \frac{x}{1+x^2} \leqslant \operatorname{Arctan}(x).}$$

Exercice 9 : Étude de $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x})$

Par opérations, f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ et :

$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \times \dfrac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0.$

La dérivée de f est donc la fonction nulle sur $\mathbf{R}^\star$.

<u>Sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^\star$</u> : f est dérivable et de dérivée nulle, donc f est constante :

$$\exists \alpha \in \mathbf{R},\ \forall x > 0,\ f(x) = \alpha.$$

<u>Sur l'intervalle $\mathbf{R}_-^\star$</u> : f est dérivable et de dérivée nulle, donc f est constante :

$$\exists \beta \in \mathbf{R},\ \forall x < 0,\ f(x) = \beta.$$

On peut calculer : $f(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(\frac{1}{1}) = 2\operatorname{Arctan}(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

De même, $f(-1) = 2\operatorname{Arctan}(-1) = 2 \times \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$, donc $\beta = -\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall x < 0,\ f(x) = -\dfrac{\pi}{2}.}$

Remarque : l'erreur à ne pas commettre ici est de dire que f est constante sur $\mathbf{R}^\star$ car de dérivée nulle. $\mathbf{R}^\star$ n'est pas un intervalle !

Exercice 10 : Suite définie par une récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1) <u>La suite (u_n) est à termes positifs.</u>

La suite (u_n) est bien définie dès lors que ses termes vérifient : $u_n \geqslant -1$.

Il suffit donc de montrer qu'ils sont positifs, ce qu'on fait par récurrence, en posant $\mathcal{P}_n$: « $u_n \geqslant 0$ ».

- Initialisation au rang $n = 0$: $u_0 = 2$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Hérédité à partir de $n = 0$: soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

Alors $u_n \geqslant 0 \geqslant -1$ donc u_{n+1} existe, et puisque $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, alors $u_{n+1} \geqslant 0$, donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
• D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

2) Limite éventuelle de u_n :
Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ.
Alors $\sqrt{1+u_n}$ converge vers $\sqrt{1+\ell}$, donc par unicité de la limite : $\ell = \sqrt{1+\ell}$, soit : $f(\ell) = \ell$.

On résout cette équation pour trouver : $\boxed{\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.}$ *Remarque : c'est le nombre d'or.*

3) Usage de l'IAF :
On pose, pour $x \geqslant -1$, $f(x) = \sqrt{1+x}$. Alors f est définie sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $]-1, +\infty[$, avec : $\forall x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, donc pour tout $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose I l'intervalle de bornes u_n et ℓ, donc $I = [\ell, u_n]$ si $u_n \geqslant \ell$ et $I = [u_n, \ell]$ sinon.
Alors f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, avec $\forall x \in \overset{\circ}{I}$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis (IAF), on a :
$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$, soit : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|}$.

Remarque : $\overset{\circ}{I}$ désigne l'intérieur de I, donc ou bien $]\ell, u_n[$, ou bien $]u_n, \ell[$.

4) Majoration de l'écart avec la limite :
Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $\mathcal{Q}_n$: « $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$ ». Montrons $\mathcal{Q}_n$ par récurrence :
• Initialisation pour $n = 0$: $\mathcal{Q}_0$: « $|u_0 - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^0}|u_0 - \ell|$ » est vraie.
• Hérédité à partir de $n = 0$: soit $n \geqslant 0$, supposons $\mathcal{Q}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}\text{Alors } |u_{n+1} - \ell| &\leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \quad \text{d'après la question précédente,}\\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell| \quad \text{par hypothèse de récurrence,}\\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \ell|, \text{ donc } \mathcal{Q}_{n+1} \text{ est vraie.}\end{aligned}$$

• D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \ell|.}$

5) La suite (u_n) converge vers ℓ :
D'après la question 4), et puisque $\dfrac{1}{2^n}$ converge vers 0, on a : $\lim |u_n - \ell| = 0$,
ce qui prouve que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge, et a pour limite } \ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.}$

6) Méthode directe pour la convergence de (u_n) :
On s'intéresse d'abord à la monotonie de (u_n).
Pour $n \geqslant 0$, $u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{1+u_{n+1}} - u_{n+1} = \dfrac{(\sqrt{1+u_{n+1}} - u_{n+1})(\sqrt{1+u_{n+1}} + u_{n+1})}{\sqrt{1+u_{n+1}} + u_{n+1}}$
en utilisant l'expression conjuguée, et on obtient :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1 + u_{n+1} - u_{n+1}^2}{\sqrt{1+u_{n+1}} + u_{n+1}} = \frac{1 + u_{n+1} - (1+u_n)}{\sqrt{1+u_{n+1}} + u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{1+u_{n+1}} + u_{n+1}}$$

donc $u_{n+2} - u_{n+1}$ a le même signe que $u_{n+1} - u_n$.
Ici, $u_1 = \sqrt{3}$ donc $u_1 - u_0 < 0$.
Par une récurrence immédiate, on montre donc que : $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite (u_n) est donc strictement décroissante. Étant minorée par 0, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \geqslant 0.}$