

# Devoir Surveillé n°6

Durée : 3 heures

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.  
L'usage des calculatrices est interdit.

## Exercice 1 : Espaces vectoriels

Dans l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^4$ , on considère les vecteurs :

$$u = (1, 0, 1, 0) \quad \text{et} \quad v = (2, 0, 1, 1).$$

On pose  $E = \text{Vect}(u, v)$  et  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, x + y - z - t = 0\}$ .

1. a) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$ . En déterminer une base ainsi que la dimension.  
 b) Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$ . En déterminer une base ainsi que la dimension.  
 c) Montrer que :  $E \subset F$ . A-t-on  $E = F$  ?  
 d) Déterminer un système d'équations cartésiennes de  $E$ .  
 e) Écrire en langage *Python* une fonction `APPARTIENT_E` prenant pour argument un quadruplet `u = (x,y,z,t)` et renvoyant `True` si le vecteur  $(x, y, z, t)$  appartient à  $E$ , et `False` sinon.
2. On pose  $G = \{(a + b, 2a, b, a) \in \mathbf{R}^4, (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$ .  
 a) Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$ . En déterminer une base ainsi que la dimension.  
 b) Montrer que :  $\text{Vect}(u) \subset E \cap F \cap G \subset E$ .  
 c) En déduire les valeurs possibles de :  $\dim(E \cap F \cap G)$ .  
 d) Montrer que :  $v \notin E \cap F \cap G$ .  
 e) En déduire que :  $E \cap F \cap G = \text{Vect}(u)$ .
3. Soit  $m$  un réel, et  $v_m$  le vecteur de  $\mathbf{R}^4$  défini par :  $v_m = (1 + m, 0, 1 - m, 3 - 2m)$ .  
 a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $m$  pour que  $v_m$  appartienne à  $E$ .  
 b) Donner dans ce cas les coordonnées de  $v_m$  selon la base de  $E$  trouvée à la question 1a).

## Exercice 2 : Géométrie

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- \* Le plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;
- \* le plan  $\mathcal{Q}$  passant par le point  $B \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et dirigé par les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Donner des équations cartésiennes des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ .
2. Montrer que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont sécants selon une droite  $\Delta$ , dont on donnera une représentation paramétrique.
3. Soit un réel  $m$ . On considère l'ensemble  $\mathcal{P}_m$  des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de l'espace tels que :

$$(x + 2y - z) + m(2x + y - 2z + 3) = 0$$

- a. Justifier que, pour tout réel  $m$ , l'ensemble  $\mathcal{P}_m$  est un plan.
- b. Montrer que, pour tout réel  $m$ , la droite  $\Delta$  est incluse dans le plan  $\mathcal{P}_m$ .
- c. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{R}$  contenant  $\Delta$  et passant par le point  $C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

4. On appelle  $H$  le projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $\Delta$ .
  - a. Déterminer les coordonnées du point  $H$ , et en déduire celles du vecteur  $\overrightarrow{CH}$ .
  - b. En déduire la distance du point  $C$  à la droite  $\Delta$ .
5. On se place dorénavant dans le plan  $(ACH)$ .  
 On considère dans ce plan l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  vérifiant :  $MA^2 + MC^2 + 2MH^2 = k$ ,  
 où  $k$  est un réel fixé.  
 On note  $G$  le point tel  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GH} = \vec{0}$ 
  - a. Déterminer les coordonnées du point  $G$ .
  - b. Montrer que, pour tout point  $M$  du plan  $(ACH)$ ,  $M \in \Gamma \Leftrightarrow 4MG^2 = k - (GA^2 + GC^2 + 2GH^2)$ .
  - c. En déduire nature et éléments caractéristiques de l'ensemble  $\Gamma$  selon les valeurs du réel  $k$ .

### Exercice 3 : Etude d'une bijection

Pour tout réel  $x$ , on pose :  $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

1. Dresser le tableau de variations complet de la fonction  $\text{sh}$ .
2. En déduire que  $\text{sh}$  réalise une bijection de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .
3. Pour tout réel  $x$ , on pose  $a(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ .
  - a. Montrer que :  $\forall x \in \mathbf{R}, a(\text{sh}(x)) = e^x$ .
  - b. En déduire l'expression de la bijection réciproque de  $\text{sh}$ .

### Exercice 4 : Étude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  suivante :

$$f : x \longmapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  puis l'ensemble de continuité de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est impaire.
3.
  - a. Montrer que :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \exp\left(t \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\right) = 1$ .
  - b. Montrer que  $f$  admet un prolongement par continuité en 1 et en  $-1$ .
4. Étudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

### Exercice 5 : Étude d'une suite

On considère pour tout entier  $n \in \mathbf{N}^*$  l'équation suivante :

$$(E_n) \quad x^3 + 2x + 1 = n.$$

Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on pose  $f(x) = x^3 + 2x + 1$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $(E_n)$  admet une unique solution, notée  $x_n$ .
2. Montrer que la suite  $(x_n)$  est strictement croissante et étudier sa convergence.
3. Donner un équivalent de  $x_n$  (partir de l'équation  $(E_n)$ ).