

Correction du Devoir Surveillé n°6

Exercice 1 : Espaces vectoriels

1.a) Étude du sous-espace vectoriel E :

E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ par définition d'un sous-espace vectoriel engendré. (u, v) est une famille génératrice de E .

C'est aussi une famille libre car u et v ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de E .

E est un s-ev de $\mathbf{R}^4$ de dimension 2, de base (u, v) .

1.b) Étude du sous-espace vectoriel F :

F est d'équation $t = x + y - z$.

Posons a, b, c les vecteurs de F :

$a = (1, 0, 0, 1)$, $b = (0, 1, 0, 1)$ et $c = (0, 0, 1, -1)$.

(a, b, c) est une famille libre car $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$.

$\dim(F) < 4$ car $F \neq \mathbf{R}^4$, donc (a, b, c) engendre F .

(a, b, c) est libre, et génératrice de F :

c'est une base de F .

F est un s-ev de $\mathbf{R}^4$ de dimension 3, de base (a, b, c) .

1.c) E est un sous-espace strict de F :

On vérifie facilement que $u \in F$ et $v \in F$.

Ainsi, $\text{Vect}(u, v) = E \subset F$.

Par ailleurs, $\dim(E) < \dim(F)$ donc : $E \subsetneq F$.

1.d) Système d'équations cartésiennes de E :

E a pour paramétrage : $\begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \\ t = \mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.

donc $\mu = t$, $\lambda = z - t$ et $x = z - t + 2t = z + t$.

E a pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x = z + t \\ y = 0 \end{cases}$

1.e) Fonction testant l'appartenance à E :

def APPARTIENT_E (u) :

(x, y, z, t) = u

return (abs(x-z-t) + abs(y) < 10*(-14))

2.a) Étude du sous-espace vectoriel G :

$G = \{(a, 2a, 0, a) + (b, 0, b, 0), (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$

$G = \{a(1, 2, 0, 1) + b(1, 0, 1, 0), (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$

En posant $w = (1, 2, 0, 1) \in \mathbf{R}^4$, on a écrit :

$G = \{aw + bu, (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$

donc $G = \text{Vect}(u, w)$, avec (u, w) une famille libre.

G est un s-ev de $\mathbf{R}^4$ de dimension 2, et de base (u, w) .

2.b) Une double inclusion :

On sait que $u \in E$ et $u \in F$.

En choisissant $a = 0$ et $b = 1$, on voit que $u \in G$.

Puisque E, F, G sont des s-ev, on a :

$\text{Vect}(u) \subset E$, $\text{Vect}(u) \subset F$ et $\text{Vect}(u) \subset G$.

Ainsi, $\text{Vect}(u) \subset E \cap F \cap G$.

Enfin, il est évident que $E \cap F \cap G \subset E$.

2.c) Dimension de $E \cap F \cap G$:

D'après **2b**, et en examinant les dimensions : $\dim(\text{Vect}(u)) \leq \dim(E \cap F \cap G) \leq \dim(E)$.

Ainsi : $1 \leq \dim(E \cap F \cap G) \leq 2$.

2.d) $v \notin E \cap F \cap G$:

Les coordonnées de v ne vérifient pas l'équation de F ,

donc $v \notin F$. Par suite, $v \notin E \cap F \cap G$.

2.e) $E \cap F \cap G = \text{Vect}(u)$:

Si $\dim(E \cap F \cap G) = 2 = \dim(E)$, alors $E \cap F \cap G = E$, et puisque $v \in E$, on a $v \in E \cap F \cap G$: c'est absurde !

Ainsi, $\dim(E \cap F \cap G) = 1$.

Mais $\text{Vect}(u) \subset E \cap F \cap G$ avec $\dim(\text{Vect}(u)) = 1$

donc : $E \cap F \cap G = \text{Vect}(u)$.

3.a) Condition pour que $v_m \in E$:

$\forall m \in \mathbf{R}, v_m \in E \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m = (1 - m) + (3 - 2m) \\ 0 = 0 \end{cases}$

Donc $v_m \in E \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

3.b) Coordonnées de v_m dans la base (u, v) :

$v_{\frac{3}{4}} = \left(\frac{7}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}(7, 0, 1, 6)$. On cherche

des réels λ, μ tels que : $(7, 0, 1, 6) = \lambda u + \mu v$:

$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 7 \\ 0 = 0 \\ \lambda + \mu = 1 \\ \mu = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -5 \text{ et } \mu = 6$

$v_{\frac{3}{4}}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$ dans la base (u, v) .

Exercice 2 : Géométrie

1. Équations cartésiennes des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$:

$\mathcal{P} : x + 2y - z + d = 0$ où $d \in \mathbf{R}$, car $\vec{n}(1, 2, -1)$ normal à $\mathcal{P}$.
 $A \in \mathcal{P}$ donc $0 + 2 - 2 + d = 0$, d'où : $\mathcal{P} : x + 2y - z = 0$

$\mathcal{Q}$ a pour paramétrage $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + s + t \end{cases}, (s, t) \in \mathbf{R}^2$.

On en déduit : $s = x - 1$ et $t = \frac{1}{2}(y + 3)$ et en réinjectant :

$z = 1 + x - 1 + \frac{1}{2}(y + 3)$. Ainsi : $\mathcal{Q} : 2x + y - 2z + 3 = 0$

2. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants selon une droite Δ :

$\vec{n}'(2, 1, -2)$ est normal à $\mathcal{Q}$ et $\vec{n}, \vec{n}'$ ne sont pas colinéaires.
 Ainsi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles : ils sont donc sécants selon une droite Δ , d'équations cartésiennes :

$$\Delta \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Posons $\lambda = x : \Delta \begin{cases} x = \lambda \\ 2y - z = -\lambda \\ y - 2z = -3 - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ 3y = 3 \\ 3z = 6 + 3\lambda \end{cases}$

Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 2 + \lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbf{R})$

Remarque : $\vec{u} \bullet \vec{n} = 0$ donc $\vec{u}$ dirige Δ .

De plus $A \in \mathcal{Q}$ donc $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. On a la même conclusion.

3.a) $\mathcal{P}_m$ est un plan :

Soit $m \in \mathbf{R}$.

Alors $\mathcal{P}_m : (1 + 2m)x + (2 + m)y + (-1 + 3m)z + 3m = 0$.

Or, $\forall m \in \mathbf{R}, \vec{n}''(1 + 2m, 2 + m, -1 + 3m) \neq \vec{0}$.

Donc $\forall m \in \mathbf{R}, \mathcal{P}_m$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}''$.

3.b) La droite Δ est incluse dans tous les plans $\mathcal{P}_m$:

Soit $M(x, y, z)$ un point de Δ .

Alors $x + 2y - z = 0$ et $2x + y - 2z + 3 = 0$ donc

$\forall m \in \mathbf{R}, (x + 2y - z) + m(2x + y - 2z + 3) = 0 + m \times 0 = 0$

donc $M \in \mathcal{P}_m$. Ainsi : $\forall m \in \mathbf{R}, \Delta \subset \mathcal{P}_m$.

3.c) Équation du plan $\mathcal{R}$ contenant Δ et C :

$C \in \mathcal{P}_m \Leftrightarrow (1 - 2) + m(2 - 4 + 3) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

donc $C \in \mathcal{P}_1$. Par ailleurs $\Delta \subset \mathcal{P}_1$

donc le plan $\mathcal{R} = \mathcal{P}_1 : x + y - z + 1 = 0$ contient Δ et C .

4.a) Projeté orthogonal de C sur Δ :

Soit $H(\lambda, 1, 2 + \lambda)$ un point de Δ .

Alors H est le projeté orthogonal de C si $\vec{CH} \bullet \vec{u} = 0$

avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ directeur de Δ , et $\vec{CH} \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

donc $\vec{CH} \bullet \vec{u} = (\lambda - 1) + \lambda = 2\lambda - 1$.

$$\vec{CH} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Ainsi : $H\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$ et $\vec{CH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.b) Distance du point C à la droite Δ :

Cette distance vaut $\|\vec{CH}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

La distance de C à Δ vaut $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

5.a) Relation équivalente :

Soit M un point du plan (ACH) . Alors : $M \in \Gamma$

$$\Leftrightarrow (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 + 2(\vec{MG} + \vec{GH})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 4MG^2 + GA^2 + GC^2 + 2GH^2 + 2\vec{MG} \bullet \vec{w} = k$$

$$\text{où } \vec{w} = \vec{GA} + \vec{GC} + 2\vec{GH}$$

$\vec{w} = \vec{0}$ par définition du point G .

$$\text{Ainsi : } M \in \Gamma \Leftrightarrow 4MG^2 = k - GA^2 - GC^2 - 2GH^2.$$

5.b) Coordonnées de G :

Soit O l'origine du repère :

$$\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OC} + 2\vec{OH}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \\ 9/4 \end{pmatrix}$$

G a pour coordonnées $G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

5.c) Caractérisation de l'ensemble Γ :

On calcule : $GA^2 = \frac{3}{8}, GC^2 = \frac{7}{8}, GH^2 = \frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} \text{Il vient alors : } M \in \Gamma &\Leftrightarrow 4MG^2 = k - \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow MG^2 = \frac{2k - 3}{8} \end{aligned}$$

- Si $k < \frac{3}{2}$, alors $\Gamma = \emptyset$,
- si $k = \frac{3}{2}$, alors $\Gamma = \{G\}$,
- si $k > \frac{3}{2}$, alors Γ est, dans le plan (ACH) ,

le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{2k - 3}{8}}$.

Exercice 3 : Tirages dans des urnes

1. sh est définie sur $\mathbf{R}$, et dérivable sur $\mathbf{R}$ par opérations.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \text{ donc sh est strictement croissante sur } \mathbf{R}.$$

Par opérations : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$. Ainsi :

x	$-\infty$	$+\infty$
sh	$-\infty$	$+\infty$

2. D'après le tableau de variations de sh, pour tout $y \in \mathbf{R}$, l'équation $\text{sh}(x) = y$ possède une unique solution. Ainsi : sh réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

3. a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $a(\text{sh}(x)) = \text{sh}(x) + \sqrt{1 + \text{sh}^2(x)}$.

$$\text{Or } 1 + \text{sh}^2(x) = 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{1}{4} (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2$$

$$\text{Ainsi : } a(\text{sh}(x)) = \text{sh}(x) + \sqrt{\frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} |e^x + e^{-x}| = e^x.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, a(\text{sh}(x)) = e^x.}$$

- b. On compose la relation précédente par le logarithme népérien :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \ln(a(\text{sh}(x))) = \ln(e^x) = x \text{ donc } \ln \circ a \circ \text{sh} = \text{Id}_{\mathbf{R}} \text{ ce qui montre que } \text{sh}^{-1} = \ln \circ a.$$

$$\boxed{\text{sh}^{-1} : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$$

sh est le sinus hyperbolique. Sa dérivée est le cosinus hyperbolique, noté ch.

sh^{-1} se note Argsh. Elle est, comme sh, impaire et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Exercice 4 : Étude d'une fonction

1. Ensemble de définition et continuité :

$$\text{On a : } f : x \mapsto \exp\left((x-1) \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) - \exp\left((x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right).$$

Donc f est définie en x tel que : $x-1 \neq 0$ et $x \neq 0$ et $\frac{x}{x-1} > 0$ et $\frac{x+1}{x} > 0$.

$$\text{Or : } \frac{x}{x-1} > 0 \iff x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\text{ et } \frac{x+1}{x} > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$

Donc f est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\cap]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[=]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$

De plus, f est continue sur $\mathcal{D}_f$ par opérations sur des fonctions usuelles continues sur leurs ensembles de définition. f est définie et continue sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

2. f impaire :

Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est symétrique par rapport à l'origine.

De plus, on a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(-x) = \left(\frac{-x}{-x-1} \right)^{-x-1} - \left(\frac{-x+1}{-x} \right)^{-x+1} = \left(\frac{x}{x+1} \right)^{-(x+1)} - \left(\frac{x-1}{x} \right)^{-(x-1)} = \left(\frac{x+1}{x} \right)^{x+1} - \left(\frac{x}{x-1} \right)^{x-1}$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est impaire.}}$$

3. a. Limite de $\exp\left(t \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\right)$:

$$\text{Soit } t > 0 : t \ln\left(\frac{1+t}{t}\right) = t \ln(1+t) - t \ln(t).$$

Or, par opérations, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(1+t) = 0$ et par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$.

$$\text{Par somme, } \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln\left(\frac{1+t}{t}\right) = 0. \quad \text{Par composée de limite : } \boxed{\lim_{t \rightarrow 0^+} \exp\left(t \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\right) = 1.}$$

b. f prolongeable par continuité :

Faisons le changement de variable $x = 1 + t$. On a donc :

$$f(x) = f(1+t) = \left(\frac{1+t}{t}\right)^t - \left(\frac{2+t}{1+t}\right)^{2+t} = \exp\left(t \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\right) - \exp\left((2+t) \ln\left(\frac{2+t}{1+t}\right)\right)$$

$$\text{Or : } \lim_{t \rightarrow 0} \exp\left((2+t) \ln\left(\frac{2+t}{1+t}\right)\right) = e^{2 \ln 2} = 4.$$

$$\text{Ainsi, d'après la question précédente, } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -3.$$

f se prolonge donc par continuité en 1 en posant $\tilde{f}(1) = -3$.

f étant impaire, elle se prolonge aussi par continuité en -1 en posant $\tilde{f}(-1) = -\tilde{f}(1) = 3$.

Conclusion : f se prolonge par continuité en 1 en posant $\tilde{f}(1) = -3$ et en -1 en posant $\tilde{f}(-1) = 3$.

4. Limites à l'infini :

On pose $u = \frac{1}{x}$, de sorte que $u \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{u}\right) = \exp\left(\left(\frac{1}{u} - 1\right) \ln\left(\frac{1/u}{1/u - 1}\right)\right) - \exp\left(\left(\frac{1}{u} + 1\right) \ln\left(\frac{1/u + 1}{1/u}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1-u}{u} \ln\left(\frac{1}{1-u}\right)\right) - \exp\left(\frac{1+u}{u} \ln\left(\frac{1+u}{1}\right)\right) = \exp\left(\frac{u-1}{u} \ln(1-u)\right) - \exp\left(\frac{1+u}{u} \ln(1+u)\right) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \ln(1-u) \underset{0}{\sim} -u \quad \text{et} \quad \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$$

$$\text{donc } \frac{u-1}{u} \ln(1-u) \underset{0}{\sim} \frac{(u-1)(-u)}{u} = 1-u \underset{0}{\sim} 1 \quad \text{et par suite : } \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u-1}{u} \ln(1-u) = 1$$

$$\text{de même, } \frac{1+u}{u} \ln(1+u) \underset{0}{\sim} \frac{(1+u)u}{u} = 1+u \underset{0}{\sim} 1 \quad \text{et par suite : } \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1+u}{u} \ln(1+u) = 1$$

$$\text{Par opérations sur les limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^1 - e^1 = 0.$$

$$\text{Puisque } f \text{ est impaire : } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

Exercice 4 : Étude d'une suite

1. f est dérivable (donc continue) sur $\mathbf{R}$. Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 5x^2 + 2 > 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ par règles sur les fonctions polynomiales.

f est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbf{R}$.

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

Ainsi, pour tout réel y , l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution réelle.

En particulier si $y = n$, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, (E_n) \text{ admet une unique solution.}}$

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$.

Puisque f est strictement croissante, on en déduit que $x_n < x_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n \geq 1} \text{ est strictement croissante.}}$

On sait donc que : ou bien (x_n) converge vers $\ell \in \mathbf{R}$, ou bien (x_n) diverge vers $+\infty$.

Si (x_n) converge vers $\ell \in \mathbf{R}$, alors par continuité de f , $(f(x_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Mais $f(x_n) = n$ donc $(f(x_n))$ diverge vers $+\infty$.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$

3. Pour tout $n \geq 1$, $x_n^3 + 2x_n + 1 = n$. Mais $x_n \rightarrow +\infty$, donc $2x_n + 1 \underset{+\infty}{=} o(x_n^3)$.

Ainsi, $x_n^3 + 2x_n + 1 \underset{+\infty}{\sim} x_n^3$, donc $x_n^3 \underset{+\infty}{\sim} n$.

On compose par la puissance $\alpha = \frac{1}{3}$: $\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}.}$

Remarque : on ne sait pas calculer directement les valeurs de la suite (x_n) .