Devoir Maison n°7

Une suite d'intégrales

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_0.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer le signe de u_n.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge, vers un réel $\ell \geqslant 0$.
5. Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$(\ast) \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

6. En déduire que $\ell = 0$.
7. Traitement informatique :
   Écrire en langage *Python* une fonction d'argument u_0 et n, et renvoyant la valeur de u_n donnée par la relation de récurrence $(\ast)$.

On pose pour $n \in \mathbf{N}^\star$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $\sigma_n = S_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

8. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n = n!(e - S_n)$.
9. Montrer que les suite (S_n) et (σ_n) sont adjacentes.
10. Déduire des questions précédentes que (S_n) converge vers le nombre e.
11. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e - S_n \leqslant \dfrac{1}{n.n!}$.
12. En déduire un encadrement portant sur u_n, puis un équivalent simple de u_n.
13. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.
    a. Expliquer pourquoi : $\lim(nv_n) = 0$.
    b. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ n^2 v_n = nv_{n+1} - nv_n - \dfrac{1}{n+1}$.
    c. En déduire que : $v_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
    d. Montrer que $v_n \sim -\dfrac{1}{n^3}$, et en déduire que : $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.