Variables aléatoires

I Variables aléatoires réelles

1 Définition

Définition

On considère (Ω, P) un espace probabilisé fini.
On appelle **variable aléatoire** une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.
Si $E \subset \mathbf{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle** (VAR).

Remarques :
- Une *variable* aléatoire est en réalité une *fonction* !
- Dans le cadre du programme, nous n'étudierons que des variables aléatoires <u>réelles</u>.

Exemple : On jette deux dés à 6 faces et on additionne les résultats obtenus.
L'univers est $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(6,5),(6,6)\}$, ensemble de tous les couples d'entiers de 1 à 6.
On peut modéliser la somme des dés par une variable aléatoire X définie par :

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbf{R} \\ (i,j) & \mapsto & i+j \end{array} \right.$$

2 Image d'une variable aléatoire, image réciproque

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

- L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé **support** de la variable aléatoire (univers-image).
- Soit une partie A de $\mathbf{R}$.
  L'image réciproque de A par X est une partie de Ω, donc un événement.
  On le note $(X \in A)$, $[X \in A]$ ou encore $\{X \in A\}$.
  La probabilité de l'événement $(X \in A)$ est notée $\mathbf{P}(X \in A)$.
  On note également, pour $x \in \mathbf{R}$:
  $\mathbf{P}(X = x)$ au lieu de $\mathbf{P}(X \in \{x\})$; $\mathbf{P}(X < x)$ au lieu de $\mathbf{P}(X \in]-\infty, x[)$;
  $\mathbf{P}(X \leqslant x)$ au lieu de $\mathbf{P}(X \in]-\infty, x])$; $\mathbf{P}(X \geqslant x)$ au lieu de $\mathbf{P}(X \in [x, +\infty[)$ ...

Le support $X(\Omega)$ est l'image directe de Ω par X, c'est-à-dire l'**ensemble des valeurs prises par** X.

3 Fonction d'une variable aléatoire

Si $\lambda \in \mathbf{R}$, et si X et Y sont deux variables aléatoires réelles de même ensemble de définition Ω, alors on peut définir leur somme $X + Y$, leur produit XY, le produit λX ... qui sont de nouvelles variables aléatoires définies sur Ω.
Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction réelle, $f \circ X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une variable aléatoire obtenue par composition, et généralement notée $f(X)$.

4 Loi d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire. On cherche à connaître la probabilité d'obtenir un élément de $X(\Omega)$.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
On appelle **loi de probabilité** de X, notée $\mathbf{P}_X$, la probabilité sur $X(\Omega)$ définie par :

$$\mathbf{P}_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1] \\ A \mapsto \mathbf{P}(X \in A) \end{cases}$$

Remarques :

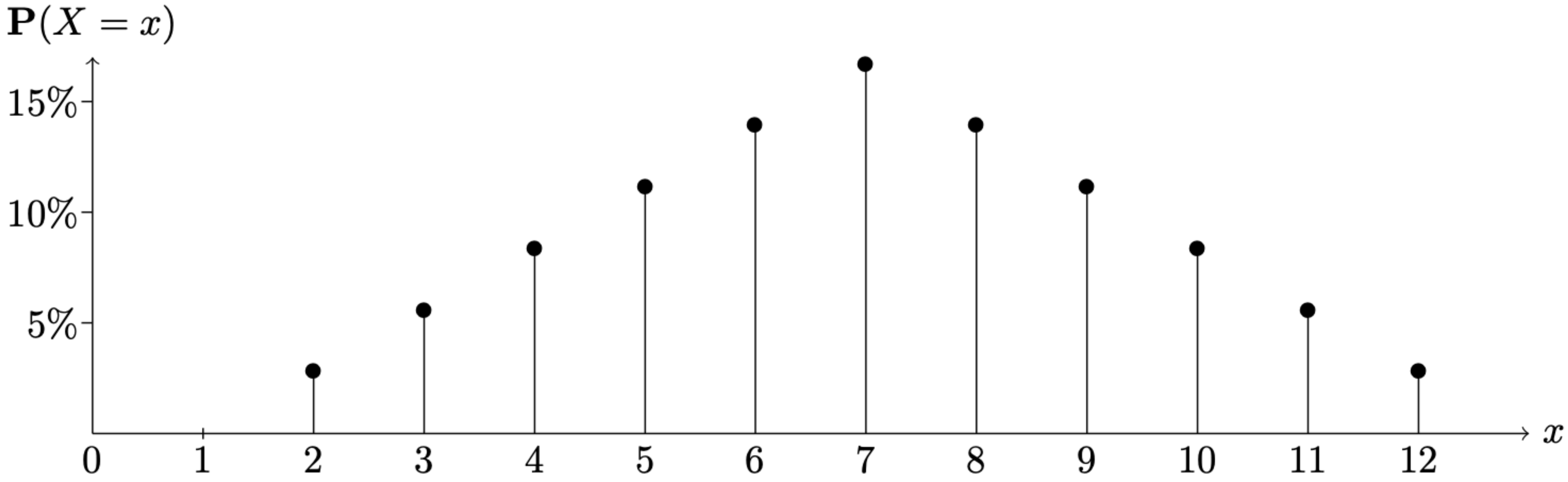
- L'univers n'est alors plus $\Omega = \{(1,1),(1,2),\cdots,(6,6)\}$ mais $X(\Omega) = \{2,3,\cdots,12\}$.
- Il suffit de connaître $\mathbf{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ pour pouvoir définir $\mathbf{P}_X$.
  On se contente donc de donner ces probabilités (comme dans le tableau précédent).
  On peut alors considérer que $\mathbf{P}_X : X(\Omega) \to [0,1]$.

Proposition

> Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de réels distincts, soit $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de réels positifs de somme égale à 1. Alors il existe une VAR X telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = x_i) = p_i$.

Les familles (x_i) et (p_i) permettent de définir la loi d'une telle VAR X.

<u>Représentation de la loi de probabilité de X</u> (diagramme en bâtons) :



5 Fonction de répartition

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers Ω.
On appelle **fonction de répartition** de X l'application $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$$

Propriété

Toute fonction de répartition est croissante sur $\mathbf{R}$, et continue à droite sur $\mathbf{R}$.
De plus, elle admet pour limite 0 en $-\infty$, et 1 en $+\infty$.

II VAR usuelles

1 Loi certaine

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur un univers Ω suit la **loi certaine de valeur** a lorsque $X(\Omega)$ est un singleton : $\exists a \in \mathbf{R}, \quad X(\Omega) = \{a\}$

En conséquence, $\mathbf{P}(X = a) = 1$ et pour tout $b \neq a$, $\mathbf{P}(X = b) = 0$.

2 Loi uniforme

DÉFINITION

On considère un univers fini Ω.
Soit $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de $\mathbf{R}$, de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$.
On dit qu'une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi uniforme sur** A lorsque :

- $X(\Omega) = A$
- $\forall x \in A, \;\; \mathbf{P}(X = x) = \dfrac{1}{n}$.

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$

Remarque : Il s'agit de la loi d'équiprobabilité sur A.
Si $A = [\![1, n]\!]$, la loi de X est alors donnée par :

x	1	2	$\cdots$	n
$\mathbf{P}(X = x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

3 Loi de Bernoulli

Définition

Soit Ω un univers fini, soit $p \in [0,1]$.
Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p lorsque :

- $X(\Omega) = \{0,1\}$
- $\begin{cases} \mathbf{P}(X=1) = p \\ \mathbf{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$.

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Loi de probabilité de X :

x	0	1
$\mathbf{P}(X = x)$	$1 - p$	p

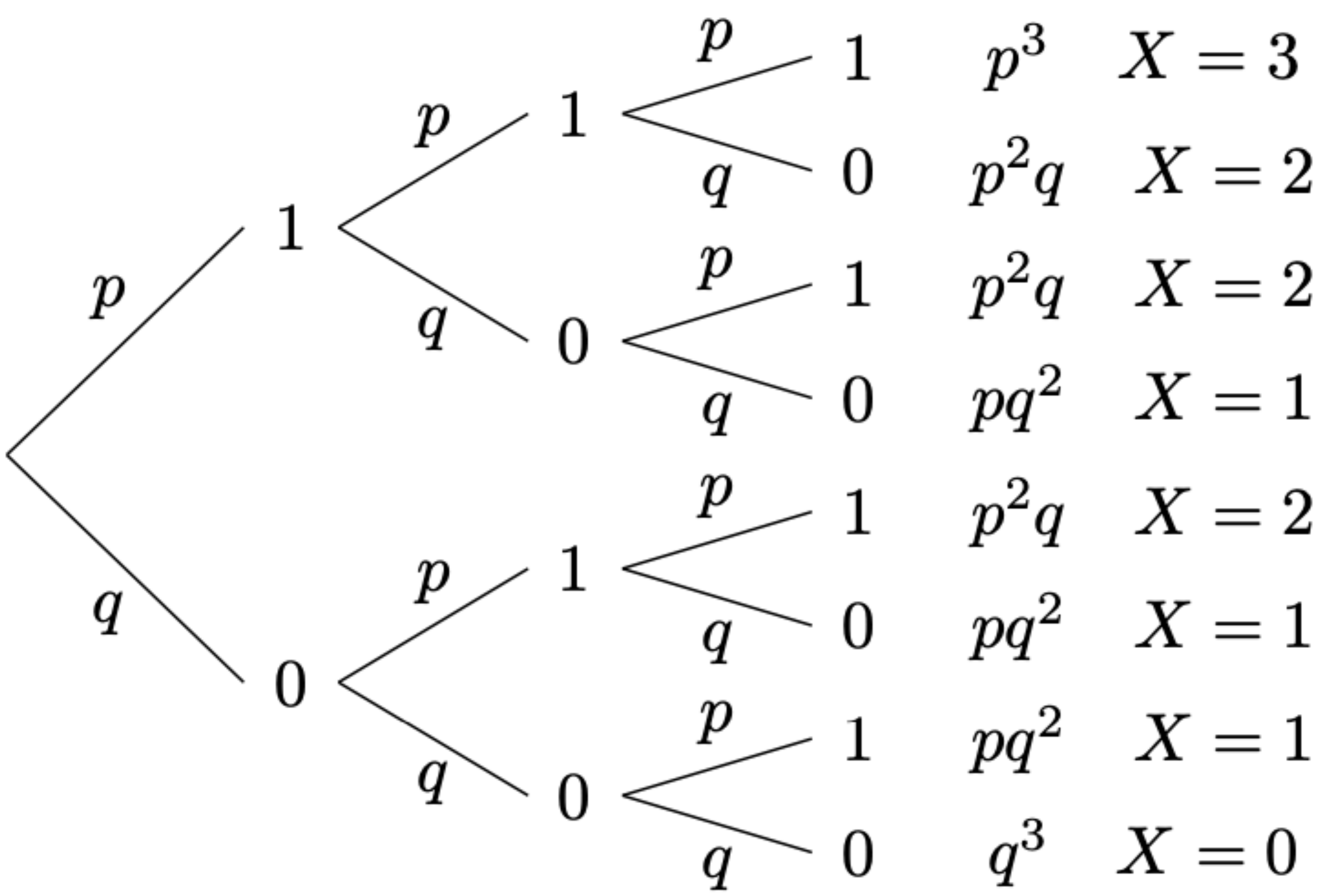
Cette loi modélise le succès $(X = 1)$ ou l'échec $(X = 0)$ à une expérience aléatoire donnée.
p est la probabilité du succès.

4 Loi binomiale

a Schéma de Bernoulli

On considère une expérience aléatoire pouvant déboucher sur un succès (avec la probabilité p) ou un échec (avec la probabilité $q = 1 - p$).
On suppose qu'on répète cette même expérience n fois, de manière indépendante des résultats précédents.
On appelle cette répétition d'expériences un **schéma de Bernoulli**.
On s'intéresse à la variable aléatoire égale au nombre de succès.

Par exemple, pour $n = 3$, on obtient le schéma de Bernoulli suivant :



b Probabilité d'obtenir k succès lors d'un schéma de Bernoulli

De manière générale, l'événement $(X = k)$ est réalisé à chaque branche donnant k succès et $n-k$ échecs. La probabilité de chacune de ces branches est $p^k q^{n-k}$.
Il y a autant de branches que d'anagrammes d'un mot de k lettres S (pour succès) et $n-k$ lettres E (pour échec). C'est à dire $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. Ainsi, $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

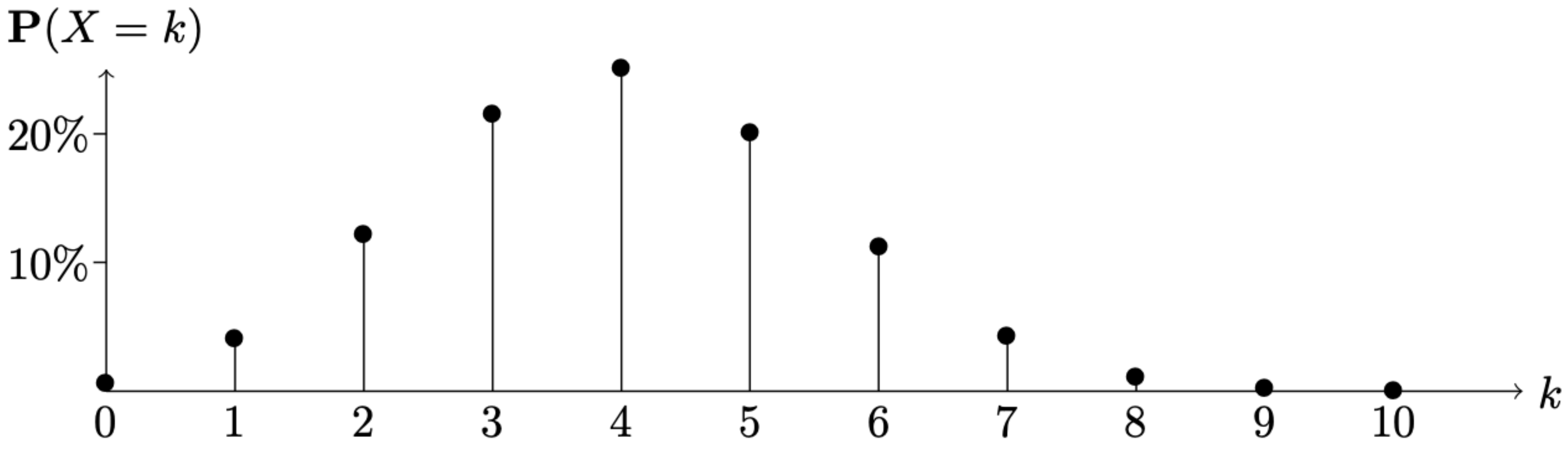
Définition

On considère un univers fini Ω. Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [0,1]$.
Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- $\forall k \in [\![0, n]\!], \;\; \mathbf{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Représentation de la loi $\mathcal{B}(10, \frac{2}{5})$:



Exemple : Le diagramme en bâtons ci-dessus indique les probabilités de tirer k flèches au but si l'on effectue 10 tirs indépendants, avec à chaque tir une probabilité de succès de 0,4.

III Moments d’une variable aléatoire réelle

1 Espérance

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle de support $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.
L'**espérance** de X, notée $\mathbf{E}(X)$, est définie par :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x)$$

On dit que X est une **variable centrée** lorsque $\mathbf{E}(X) = 0$.

2 Propriétés de l'espérance

Proposition

Soient X, Y deux variables aléatoires.

- $\forall a, b \in \mathbf{R}, \;\; \mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$ — Linéarité de l'espérance
- Si $X \geqslant 0$, alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$ — Positivité de l'espérance
- Si $X \leqslant Y$, alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$ — Croissance de l'espérance.

On retient en particulier la formule : $\boxed{\forall a, b \in \mathbf{R}, \;\; \mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b}$.

Proposition

Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de VAR. Alors : $\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i)$.

DÉFINITION

Soi X une variable aléatoire réelle d'espérance $\mathbf{E}(X)$. On pose $Y = \mathbf{X} - \mathbf{E}(X)$.
Alors $\mathbf{E}(Y) = 0$. On appelle Y la **variable aléatoire centrée associée à** X.

Proposition **Formule de transfert**

On considère une variable aléatoire réelle X de support $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Soit f une application à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$. Alors :

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x)$$

3 Moment d'ordre r

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire réelle de support $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Soit $r \in \mathbf{N}$.

On appelle **moment d'ordre** r de X le réel : $m_r(X) = \mathbf{E}(X^r) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^r \, \mathbf{P}(X = x_i)$.

On appelle **moment centré d'ordre** r de X le réel : $\mu_r(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^r\right)$.

Cas particuliers : $m_0(X) = 1$, $m_1(X) = \mathbf{E}(X)$ et $\mu_1(X) = 0$.

4 Variance

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire réelle.
On appelle **variance** de X et on note $\mathbf{V}(X)$ le réel : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))^2\big) = \mu_2(X)$.

Remarque : La variance est un *indicateur de dispersion* de la variable aléatoire autour de son espérance.

Proposition Formule de König Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors on a : $\boxed{\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2}$

Proposition

$\forall a, b \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$

Remarque : Dans la plupart des cas concrets, une variable aléatoire X s'exprime dans une unité (distance, durée...). Dans ce cas, la variance de X s'exprime dans le carré de cette unité. Par exemple si X est une longueur, alors $\mathbf{V}(X)$ est une surface.

5 Écart-type

Puisque $(X-m)^2 \geqslant 0$, la variance $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big((X-m)^2\big)$ est positive. Ceci justifie la définition suivante :

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire réelle.
On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$

L'*écart-type* $\sigma(X)$ s'exprime, le cas échéant, dans la même unité que X.

IV Formules des lois usuelles

1 Loi certaine

Propriété

Si X suit la loi certaine de valeur a, alors $\mathbf{E}(X) = a$ et $\mathbf{V}(X) = 0$.

2 Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

PROPOSITION

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors : $\mathbf{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

3 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

PROPOSITION

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbf{E}(X) = p$ et $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.

4 Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

PROPOSITION

> Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.

V Indépendance

1 Indépendance deux-à-deux

Définition

Deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur le même univers Ω sont dites **indépendantes** si :

$$\forall\,(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}\big((X=x) \cap (Y=y)\big) = \mathbf{P}(X=x) \times \mathbf{P}(Y=y),$$

ie : si pour tout couple $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $[X=x]$ et $[Y=y]$ sont indépendants.

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $[X \in A]$ et $[Y \in B]$ sont indépendants.

Théorème

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ deux variables aléatoires **indépendantes**.
Alors :
$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p).$$

2 Indépendance mutuelle

Définition

Les variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_n$ sont dites **indépendantes** ou **mutuellement indépendantes** si :

$$\forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad \mathbf{P}\big(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\big) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n = x_n).$$

ie : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $[X_1 = x_1], \ldots, [X_n = x_n]$ sont mutuellement indépendants.

Proposition

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de VAR mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.

Théorème **Lemme des coalitions**

Soit $(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_p)$ une famille de VAR mutuellement indépendantes.

- Soient $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}^{p-n} \longrightarrow \mathbf{R}$.

  Alors, les VAR $f(X_1, \ldots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \ldots, X_p)$ sont indépendantes.
- Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

  Alors, les VAR $f_1(X_1), \ldots, f_p(X_p)$ sont mutuellement indépendantes.

3 Conséquence sur l'espérance et la variance

Théorème

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes**. Alors :

- $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$.
- $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

Remarques :

* On définit la *covariance* de X, Y par : $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\left((X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y))\right)$.
  La formule de König-Huygens donne alors : $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$.
  On dit que deux VAR sont *non corrélées* lorsque leur covariance est nulle.

Le premier résultat assure donc que deux VAR indépendantes sont non corrélées.

Attention !

La réciproque est fausse en général : $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\ \mathbf{E}(Y)$ n'implique pas X et Y indépendantes.

Par contraposition, on montre que : si $\mathbf{E}(XY) \neq \mathbf{E}(X)\ \mathbf{E}(Y)$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires **mutuellement indépendantes**. On a :

* $\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k)$,
* $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)$

VI Compléments

1 Inégalité de Markov

Théorème

> Soit X une variable aléatoire réelle **positive**. Alors :
> $$\forall a > 0, \quad \mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Remarque : Cette formule peut aussi s'écrire $1 - \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \leqslant \mathbf{P}(|X - m| < \varepsilon) \leqslant 1$. Elle fournit donc une estimation de la probabilité que X soit proche de sa moyenne m à une précision ε.
On voit alors que plus l'écart-type (ou la variance) est petit, plus X est "proche" de sa moyenne.

3 Variance d'une somme de variables aléatoires

Soient X et Y deux VAR. Alors : $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de VAR. Alors : $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) + 2 \times \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.