

Corrigé du Devoir maison n°7

Une suite d'intégrales

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on pose : $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. Premier terme. $u_0 = \int_0^1 e^t dt = e^1 - e^0 : \boxed{u_0 = e - 1.}$

2. Signe de u_n . $\forall t \in [0, 1], (1-t)^n e^t \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est positive.}}$

3. Monotonie de (u_n) . $\forall t \in [0, 1], 0 \leq 1-t \leq 1$ donc $(1-t)^{n+1} e^t \leq (1-t)^n e^t$.

Par croissance de l'intégrale : $u_{n+1} \leq u_n$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

4. Convergence. (u_n) est décroissante et minorée par 0. $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell \geq 0.}$

5. Relation de récurrence. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a alors : $u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$.

On pose $u : t \mapsto e^t, v : t \mapsto (1-t)^{n+1}$.

u, v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, et $u' : t \mapsto e^t, v' : t \mapsto -(n+1)(1-t)^n$.

Par intégration par parties : $u_{n+1} = [(1-t)^{n+1} e^t]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n e^t dt$

donc $u_{n+1} = 0 - 1^{n+1} e^0 + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.}$

6. (u_n) converge vers 0. Supposons que $\ell > 0$. Alors $(n+1)u_n \rightarrow +\infty$ par opérations, donc (u_{n+1}) diverge vers $+\infty$. C'est absurde ! Ainsi, $\boxed{\ell = 0.}$

7. Traitement informatique.

def SUITE(u0,n) :

for k **in** range(n) :

 u0 = (k+1)*u0 - 1

return u0

On pose pour $n \in \mathbf{N}^* : S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $\sigma_n = S_n + \frac{1}{n \times n!}$.

8. Relation entre u_n et S_n .

Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{R}_n : u_n = n!(e - S_n)$.

• $1!(e - S_1) = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}\right) = e - (1 + 1) = e - 2$ d'une part, et $u_1 = 1 \times u_0 - 1 = e - 2$ d'autre part.

$\mathcal{R}_1$ est donc vraie.

• Soit $n \geq 1$ et supposons $\mathcal{R}_n$ vraie. Alors $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 = (n+1)n!(e - S_n) - 1$

donc $u_{n+1} = (n+1)! \left(e - S_n - \frac{1}{(n+1)!} \right)$. Or $S_n + \frac{1}{(n+1)!} = S_{n+1}$,

donc $u_{n+1} = (n+1)!(e - S_{n+1})$ et $\mathcal{R}_{n+1}$ est vraie.

• Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = n!(e - S_n).}$

9. Des suites adjacentes.

$\forall n \geq 0, S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)!}$ donc (S_n) est croissante.

$\forall n \geq 0, \sigma_{n+1} - \sigma_n = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$.

Donc : $\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{1}{n(n+1)(n+1)!} (n(n+1) + n - (n+1)^2) = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$

donc (σ_n) est décroissante. Enfin, $\sigma_n - S_n = \frac{1}{n.n!}$ converge vers 0.

Conclusion : $\boxed{\text{les suites } (S_n) \text{ et } (\sigma_n) \text{ sont adjacentes.}}$

10. Limite de (S_n) .

D'après le théorème des suites adjacentes, (S_n) et (σ_n) convergent, vers la même limite ℓ .

Supposons que $\ell \neq e$. Alors $e - S_n$ converge par opérations vers $e - \ell \neq 0$

donc $u_n = n!(e - S_n)$ diverge vers $\pm\infty$. C'est absurde ! Donc $\boxed{(S_n) \text{ converge vers } e.}$

11. Encadrement de $e - S_n$.

(S_n) et (σ_n) étant adjacentes et convergentes vers e , on a : $\forall n \geq 1, S_n \leq S_{n+1} \leq e \leq \sigma_n = S_n + \frac{1}{n.n!}$

On a donc : $e - S_n \leq \frac{1}{n.n!}$ et $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)!} \leq e$ donc $\forall n \geq 1, \frac{1}{(n+1)!} \leq e - S_n \leq \frac{1}{n.n!}$.

12. Équivalent de (u_n) . Vu les questions 8 et 11, $\frac{n!}{(n+1)!} \leq u_n \leq \frac{n!}{n.n!}$ donc $\forall n \geq 1, \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

$\frac{n}{n+1} \leq n.u_n \leq 1$ et $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$. D'après le théorème des gendarmes, $(n.u_n)$ tend vers 1 : $u_n \sim \frac{1}{n}$.

13. a. $nv_n = n(u_n - \frac{1}{n}) = nu_n - 1$ et (nu_n) tend vers 1 donc $\lim(nv_n) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{b. } nv_{n+1} &= n(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}) = n((n+1)u_n - 1) - \frac{n}{n+1} = n(n+1)(v_n + \frac{1}{n}) - n - \frac{n}{n+1} \\ &= n^2v_n + n + nv_n + 1 - n - \frac{n}{n+1} = n^2v_n + nv_n + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \forall n \geq 1, n^2v_n = nv_{n+1} - nv_n - \frac{1}{n+1}.$$

c. $nv_{n+1} = \frac{n}{n+1}(n+1)v_{n+1}$ tend vers 0 par opérations car (nv_n) tend vers 0.

Par opérations encore, $nv_{n+1} - nv_n - \frac{1}{n+1}$ tend vers 0. (n^2v_n) tend vers 0 donc $v_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

d. $nv_{n+1} = n \times o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $nv_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $-\frac{1}{n+1} \sim -\frac{1}{n}$.

Donc d'après 13b, $n^2v_n \sim -\frac{1}{n}$. On en déduit par quotient que $v_n \sim -\frac{1}{n^3}$.

Cela signifie que $v_n = -\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, donc $u_n = \frac{1}{n} + v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$$\text{soit : } \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$