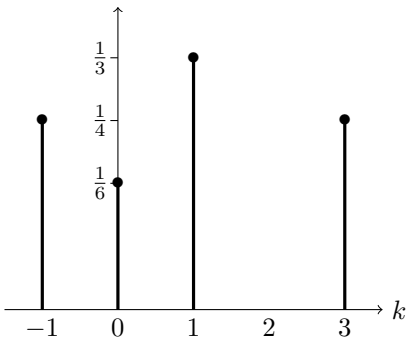
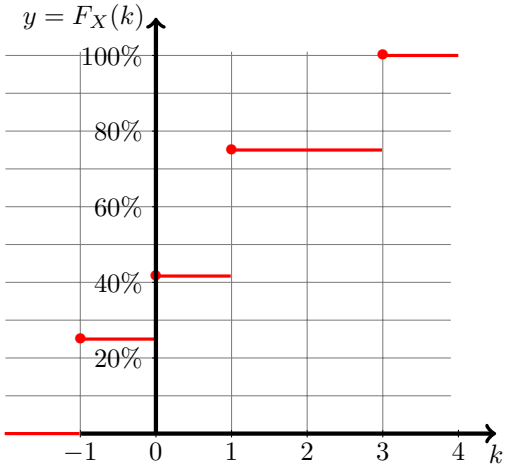
**Exercice 1** : Un exemple de VAR

1. Diagramme en bâtons de $X$




2. Fonction de répartition de $X$




3. $\mathbf{P}(X \leqslant 0) = \mathbf{P}(X=-1) + \mathbf{P}(X=0) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{12}$.

   $\mathbf{P}(-0,5 \leqslant X < 3) = \mathbf{P}(X=0) + \mathbf{P}(X=1) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$.

4. Loi de $Y = |X|$

| $k$ | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}(Y=k)$ | 1/6 | 7/12 | 1/4 |

Loi de $Z = X(X^2-1)$

| $k$ | 0 | 24 |
|---|---|---|
| $\mathbf{P}(Z=k)$ | 3/4 | 1/4 |

5. Espérances et variances

$\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{4}(-1) + \dfrac{1}{6}\times 0 + \dfrac{1}{3}\times 1 + \dfrac{1}{4}\times 3$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X) = \dfrac{5}{6}.}$

$\mathbf{E}(X^2) = \dfrac{1}{4}(-1)^2 + \dfrac{1}{6}\times 0^2 + \dfrac{1}{3}\times 1^2 + \dfrac{1}{4}\times 3^2$ donc $\mathbf{E}(X^2) = \dfrac{17}{6}$.

D'après le théorème de König-Huygens, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \big(\mathbf{E}(X)\big)^2 = \dfrac{17}{6} - \left(\dfrac{5}{6}\right)^2$ donc $\boxed{\mathbf{V}(X) = \dfrac{77}{36}.}$

$\mathbf{E}(Y) = \dfrac{7}{12}\times 1 + \dfrac{1}{4}\times 3 = \dfrac{4}{3}$, puis $\mathbf{E}(Y^2) = \dfrac{7}{12}\times 1^2 + \dfrac{1}{4}\times 3^2 = \dfrac{17}{6}$.

D'où : $\mathbf{V}(Y) = \dfrac{17}{6} - \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{19}{18}$.

$\mathbf{E}(Z) = \dfrac{1}{4}\times 24 = 6$, puis $\mathbf{E}(Z^2) = \dfrac{1}{4}\times 24^2 = 144$ donc $\mathbf{V}(Z) = 144 - 6^2 = 108$.

---

**Exercice 2** : Loi de $X$ étant donnée sa fonction de répartition.

Loi de $X$

| $k$ | $-2$ | 2 |
|---|---|---|
| $\mathbf{P}(X=k)$ | 2/3 | 1/3 |

Espérance de $X$ :

$\mathbf{E}(X) = \dfrac{2}{3}(-2) + \dfrac{1}{3}\times 2 = -\dfrac{2}{3}$.

Variance de $X$ : $X^2 = 4$ (loi certaine) donc $\mathbf{E}(X^2) = 4$ et $\mathbf{V}(X) = 4 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{32}{9}$.

---

**Exercice 3** : Loi lors d'un tirage sans remise.

$X$ est le nombre de tirages nécessaires pour choisir un homme.

Au minimum, $X = 1$ : on a choisi un homme dès le premier tirage.

Au maximum, puisqu'il y a $p$ femmes, on obtient le premier homme au $(p+1)^{\text{ème}}$ tirage.

Ainsi, le support de $X$ est $\boxed{X(\Omega) = [\![1, p+1]\!].}$
Soit $k \in [\![1, p+1]\!]$. On cherche $\mathbf{P}(X = k)$, *ie* la probabilité d'obtenir le premier homme au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout $i \in [\![1, n+p]\!]$, notons $F_i$ l'événement « *une femme est choisie au tirage* $i$ ».
Alors : $[X = k] = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k}$.
D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = k) &= \mathbf{P}(F_1) \times \mathbf{P}_{F_1}(F_2) \times \ldots \times \mathbf{P}_{F_1 \cap \ldots \cap F_{k-2}}(F_{k-1}) \times \mathbf{P}_{F_1 \cap \ldots \cap F_{k-1}}\left(\overline{F_k}\right) \\ &= \frac{p}{n+p} \times \frac{p-1}{n+p-1} \times \ldots \times \frac{p-(k-2)}{n+p-(k-2)} \times \frac{n}{n+p-(k-1)}.\end{aligned}$$

On peut utiliser la notation factorielle : $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{p!}{(p-k+1)!} \times \dfrac{(n+p-k)!}{(n+p)!} \times n$

et (ce n'est pas un objectif de l'exercice) obtenir : $\boxed{\forall k \in [\![1, p+1]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{n}{p-k+1} \dfrac{\binom{p}{k}}{\binom{n+p}{k}}.}$

Autre façon de rédiger : soit $Y_k$ la VAR égale au nombre d'hommes choisis au cours des $k$ premiers tirages.
Alors $Y_k \hookrightarrow \mathcal{H}(n+p, k, \frac{n}{n+p})$ : loi hypergéométrique de paramètres $N = n+p$ (nombre total de personnes), $k$ tirages sans remise, et avec la proportion $\dfrac{n}{n+p}$ d'hommes dans l'échantillon.
Ainsi, $[X = k] = [Y_{k-1} = 0] \cap \overline{F_k}$. En effet, choisir pour la première fois un homme au tirage $k$ signifie ne choisir aucun homme au cours des $(k-1)$ premiers tirages, et choisir un homme au tirage $k$.
Il vient alors (formule des probabilités composées) :

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y_{k-1} = 0) \times \mathbf{P}_{Y_{k-1}=0}\left(\overline{F_k}\right) = \frac{\binom{n}{0}\binom{p}{k-1}}{\binom{n+p}{k-1}} \times \frac{n}{n+p-k+1} = \frac{n}{n+p-k+1} \times \frac{\binom{p}{k-1}}{\binom{n+p}{k-1}}.$$

d'après la formule de la loi hypergéométrique.
*Remarque* :
en utilisant le lemme du pion, on montre que le résultat ainsi obtenu est identique au précédent.

---

**Exercice 4** : Les haies.
Au minimum, $X = 2$ car la première haie est toujours franchie avec succès et le sportif peut échouer sur la deuxième haie (probabilité 1/2).
Au maximum, le sportif franchit toutes les haies, et alors $X = n+1$.
Ainsi, le support de $X$ est $\boxed{X(\Omega) = [\![2, n+1]\!].}$

Pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, on cherche $\mathbf{P}(X = k)$.
Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on note $H_i$ l'événement : « *la* $i^{ème}$ *haie est franchie avec succès* ».

Alors $[X = k] = H_2 \cap H_3 \cap \ldots \cap H_{k-1} \cap \overline{H_k}$ si $k \leqslant n$, et $P(X = n+1) = \bigcap_{i=2}^{n} H_i$.

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\forall k \leqslant n,\ \mathbf{P}(X = k) &= \mathbf{P}(H_2) \times \mathbf{P}_{H_2}(H_3) \times \ldots \times \mathbf{P}_{H_2 \cap \ldots \cap H_{k-2}}(H_{k-1}) \times \mathbf{P}_{H_2 \cap \ldots \cap H_{k-1}}\left(\overline{H_k}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{1}{k-1} \times \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{k-1}{k!} \quad \text{d'après l'énoncé ;}\end{aligned}$$

et $\mathbf{P}(X = n+1) = \dfrac{1}{n!}$.

Enfin, $\mathbf{P}(X = n+1) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n!}$.

---

**Exercice 5** : Maximum obtenu en lançant $n$ dés.

1. <u>Cas où $n = 2$</u> :
   On peut ici simplement examiner les 36 événements élémentaires pour déterminer la loi de $M$.
   Le support de $M$ est $M(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.
   $[M = 1]$ est l'événement $\{(1,1)\}$ : obtenir un double 1.
   $[M = 2]$ est l'événement $\{(1,2), (2,2), (2,1)\}$.
   $[M = 3]$ est l'événement $\{(1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1)\}$.
   $[M = 4]$ est l'événement $\{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (4,3), (4,2), (4,1)\}$.
   $[M = 5]$ est l'événement $\{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (5,4), (5,3), (5,2), (5,1)\}$.
   $[M = 6]$ est l'événement $\{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,5), (6,4), (6,3), (6,2), (6,1)\}$.

Par équiprobabilité, on trouve la loi de $M$ :

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}(M=k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{11}{36}$ |

Espérance de $M$ :
$\mathbf{E}(M) = \frac{1}{36}\times 1 + \frac{3}{36}\times 2 + \frac{5}{36}\times 3 + \frac{7}{36}\times 4 + \frac{9}{36}\times 5 + \frac{11}{36}\times 6$, donc $\boxed{\mathbf{E}(M) = \frac{161}{36}.}$

Variance de $M$ :
On calcule d'abord $\mathbf{E}(M^2) = \frac{1}{36}\times 1^2 + \frac{3}{36}\times 2^2 + \frac{5}{36}\times 3^2 + \frac{7}{36}\times 4^2 + \frac{9}{36}\times 5^2 + \frac{11}{36}\times 6^2 = \frac{791}{36}$
D'après König-Huygens : $\mathbf{V}(M) = \mathbf{E}(M^2) - \mathbf{E}(M)^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2$ donc $\boxed{\mathbf{V}(M) = \frac{2555}{36^2}.}$

2. Cas général : Soit $k \in [\![1,6]\!]$.
Alors $[M \leqslant k]$ signifie que le maximum des dés ne dépasse pas $k$, donc qu'aucun dé ne dépasse $k$ :
$\forall k \in [\![1,6]\!],\ [M \leqslant k] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant k]$

3. Fonction de répartition puis loi de $M$ :
D'après la question précédente et la formule des probabilités composées :
$$\forall k \in [\![1,6]\!],\ F_M(k) = \mathbf{P}(M \leqslant k) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant k) \times \mathbf{P}_{[X_1 \leqslant k]}(X_2 \leqslant k) \times \ldots \times \mathbf{P}_{[X_1 \leqslant k] \cap \ldots \cap [X_{n-1} \leqslant k]}(X_n \leqslant k)$$
$$= \frac{k}{6} \times \frac{k}{6} \times \ldots \times \frac{k}{6} \quad \text{donc} \quad \boxed{\forall k \in [\![1,6]\!],\ F_M(k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n.}$$

On obtient la loi de $M$ en écrivant : $\forall k \in [\![1,6]\!],\ \mathbf{P}(M=k) = F_M(k) - F_M(k-1)$,
car $M = k$ signifie que $M$ est inférieur ou égal à $k$ mais pas inférieur ou égal à $k-1$.
Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1,6]\!],\ \mathbf{P}(M=k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n.}$

4. Espérance de $M$ :
$$\mathbf{E}(M) = \sum_{k=1}^{6} k\left(\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^{n+1}}{6^n} - \sum_{k=1}^{6} \frac{k(k-1)^n}{6^n} \quad \text{par linéarité,}$$
$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{k^{n+1}}{6^n} - \sum_{k=0}^{5} \frac{(k+1)k^n}{6^n} = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^{n+1}}{6^n} - \sum_{k=0}^{5} \frac{k^{n+1}}{6^n} - \sum_{k=0}^{5} \frac{k^n}{6^n} \quad \text{par glissement d'indices}$$
$$= \frac{6^{n+1}}{6^n} - \sum_{k=0}^{5} \frac{k^n}{6^n} \quad \text{par téléscopage.} \quad \text{Ainsi,} \ \boxed{\mathbf{E}(M) = 6 - \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{k}{6}\right)^n.}$$

$\forall k \in [\![1,5]\!],\ -1 < \frac{k}{6} < 1$ donc $\left(\frac{k}{6}\right)^n$ tend vers 0. Par opérations, on a donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X) = 6.}$
De façon assez évidente, lorsqu'on lance un très grand nombre de dés, le maximum obtenu est en moyenne très proche de 6.

---

**Exercice 6** :

1. Support de $X_n$ :
Au minimum, on ne pioche que des boules blanches, donc $X_n = 0$.
Au maximum, on ne pioche que des boules noires (tant qu'il y en a), donc, si $n \leqslant 5$, alors $X_n = n$ et si $n \geqslant 6$, alors $X_n = 6$.
Ainsi, $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ si } n \leqslant 5, \text{ et } X_n(\Omega) = [\![0,6]\!] \text{ si } n \geqslant 6.}$

2. Couleur de la dernière boule piochée :
Soit $i \in \mathbf{N}^\star$. On note $B_i$ l'événement « *la boule piochée au $i^{ème}$ tirage est blanche* ».
Alors $(B_{n+1}, \overline{B_{n+1}})$ forme un système complet d'événements. Ainsi :
$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \mathbf{P}([X_{n+1} = k] \cap B_{n+1}) + \mathbf{P}([X_{n+1} = k] \cap \overline{B_{n+1}})$

$$= \mathbf{P}([X_n = k] \cap B_{n+1}) + \mathbf{P}([X_n = k-1] \cap \overline{B_{n+1}})$$

car $[X_{n+1} = k] \cap B_{n+1}$ signifie qu'on a pioché $k$ boules noires au cours des $(n+1)$ premiers tirages et une boule blanche au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, donc qu'on a pioché $k$ boules noires au cours des $n$ premiers tirages et une blanche ensuite ;

et de même : $[X_{n+1} = k] \cap \overline{B_{n+1}}$ signifie qu'on a pioché $k$ boules noires au cours des $(n+1)$ premiers tirages et une boule noire au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, donc qu'on a pioché $k-1$ boules noires au cours des $n$ premiers tirages et une noire ensuite.

D'après la formule des probabilités totales :

$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \mathbf{P}(X_n = k) \times \mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) + \mathbf{P}(X_n = k-1) \times \mathbf{P}_{[X_n=k-1]}\left(\overline{B_{n+1}}\right)$

avec $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \dfrac{4+k}{10}$ car si on a pioché $k$ boules noires lors des $n$ premiers tirages, alors on les a remplacées par $k$ boules blanches, donc il y a dans l'urne $4+k$ boules blanches (et toujours 10 boules en tout), et $\mathbf{P}_{[X_n=k-1]}\left(\overline{B_{n+1}}\right) = \dfrac{7-k}{10}$ car si on a pioché $k-1$ boules noires au cours des $n$ premiers tirages, il en reste $6-(k-1) = 7-k$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0,6]\!],\ \mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \mathbf{P}(X_n = k) \times \frac{4+k}{10} + \mathbf{P}(X_n = k-1) \times \frac{7-k}{10}}$$

3. Une relation de récurrence :

Par définition, $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^{6} k\mathbf{P}(X_{n+1} = k)$ donc vu ce qui précède, le terme pour $k = 0$ étant nul,

$$\begin{aligned}
10\mathbf{E}(X_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{6} \big(k(4+k)\mathbf{P}(X_n = k) + k(7-k)\mathbf{P}(X_n = k-1)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{6} (k^2+4k)\mathbf{P}(X_n = k) + \sum_{j=0}^{5} (j+1)(6-j)\mathbf{P}(X_n = j) \quad \text{par linéarité et glissement d'indices} \\
&= \sum_{k=1}^{5} \big(k^2+4k+(k+1)(6-k)\big)\mathbf{P}(X_n = k) + \underbrace{6\mathbf{P}(X_n = 0)}_{j=0} + \underbrace{60\mathbf{P}(X_n = 6)}_{k=6} \\
&= \sum_{k=1}^{5} \big(9k+6\big)\mathbf{P}(X_n = k) + 6\mathbf{P}(X_n = 0) + 60\mathbf{P}(X_n = 6) \\
&= \sum_{k=0}^{6} \big(9k+6\big)\mathbf{P}(X_n = k) \ = \ 9\mathbf{E}(X_n) + 6 \times 1 \text{ , donc } \boxed{\mathbf{E}(X_{n+1}) = \frac{9}{10}\mathbf{E}(X_n) + \frac{6}{10}.}
\end{aligned}$$

4. Calcul de l'espérance

On reconnaît une relation des suites arithmético-géométrique. On résout $\ell = \dfrac{9}{10}\ell + \dfrac{6}{10}$,

ce qui donne $\ell = 6$. La suite $v_n = \mathbf{E}(X_n) - 6$ est géométrique de raison $\dfrac{9}{10}$,

donc $\forall n \geqslant 6,\ v_n = v_6 \left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-6}$ et finalement : $\boxed{\forall n \geqslant 6,\ \mathbf{E}(X_n) = v_6 \left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-6} + 6.}$

On en déduit que $\boxed{\lim \mathbf{E}(X_n) = 6}$ , ce qui revient à dire que, après avoir effectué un très grand nombre de tirages, on aura en moyenne pioché toutes les boules noires.

**Exercice 7** :

1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(6, 0.51)$. $\mathbf{E}(X) = 6 \times 0,51 = 3,06$ et $\mathbf{V}(X) = 6 \times 0,51 \times 0,49 = 1,4994$.
2. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(365, \frac{1}{125})$. $\mathbf{E}(X) = \frac{365}{125} = 2,92$ et $\mathbf{V}(X) = 365 \times \frac{1}{125} \times \frac{124}{125} = 2,89664$.
3. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
4. $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$. $\mathbf{E}(Y) = \frac{10}{3}$ et $\mathbf{V}(Y) = \frac{10}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$.
5. $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 10]\!])$. $\mathbf{E}(Z) = \frac{1+10}{2} = \frac{11}{2}$ et $\mathbf{V}(Z) = \frac{10^2-1}{12} = \frac{33}{4}$.
6. $S \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{2}{5})$. $\mathbf{E}(S) = \frac{2}{5}$ et $\mathbf{V}(S) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.
7. $R \hookrightarrow \mathcal{B}(3, \frac{2}{5})$. $\mathbf{E}(R) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ et $\mathbf{V}(R) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{25}$.

8. $N \hookrightarrow \mathcal{H}(5000, 100, \frac{1}{10})$. $\mathbf{E}(N) = \frac{100}{10} = 10$ et $\mathbf{V}(N) = 100 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{5000-100}{5000-1} = \frac{44100}{4999}$.

9. $B \hookrightarrow \mathcal{B}(100, \frac{1}{10})$. $\mathbf{E}(B) = \frac{100}{10} = 10$ et $\mathbf{V}(B) = 100 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 9$.

**Exercice 8** :
Une liste non ordonnée correspond à un sous-ensemble de l'ensemble des $n$ personnes.
On sait qu'un ensemble de cardinal $n$ possède au total $2^n$ sous-ensembles.
Il y a donc $2^n$ listes de noms dans l'urne.
*Exemple avec* $n = 3$ : soient les personnes Alain (A), Béatrice (B) et Chloé (C).
Il y alors dans l'urne les listes : A, B, C, AB, AC, BC, ABC et la liste vide, ce qui fait $8 = 2^3$ listes.
Soit $X$ le nombre de noms sur une liste piochée au hasard.
Sur l'exemple précédent, $X$ peut valoir de 0 (liste vide) à 3 (liste ABC), donc $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.
On a, par équiprobabilité : $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$, et $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = \dfrac{3}{8}$.
On voit apparaître une loi binomiale !
Cas général : $\boxed{X(\Omega) = [\![0, n]\!]}$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors le nombre de listes de longueur $k$ correspond au nombre de sous-ensembles de cardinal $k$ dans un ensemble à $n$ éléments. On sait donc qu'il est égal au coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Par équiprobabilité : $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.}$

On peut alors écrire : $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$,

avec $p = \dfrac{1}{2}$ et $q = 1 - p$. Ainsi : $\boxed{X \hookrightarrow B(n, \frac{1}{2}).}$ En conséquence : $\boxed{\mathbf{E}(X) = \dfrac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \dfrac{n}{4}.}$

**Exercice 9** :
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $D_i$ l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ pièce testée est défectueuse. »
Détection par un robot :
Au minimum, $X = 1$ lorsque le robot choisit en premier de tester la pièce défectueuse. Au maximum, $X = n$ lorsqu'il choisit cette pièce en dernier. Ainsi, $\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!].}$
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $[X = k] = D_k$.
Par équiprobabilité, $\mathbf{P}(D_k) = \dfrac{1}{n}$, donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

$\boxed{X \text{ suit donc une loi uniforme sur } [\![1, n]\!]}$. En conséquence : $\boxed{\mathbf{E}(X) = \dfrac{n+1}{2} \text{ et } \mathbf{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}.}$

Détection par un humain :
Maintenant, $\boxed{Y(\Omega) = [\![1, n-1]\!]}$ car si la pièce défectueuse n'a pas été repérée au cours des $(n-1)$ premiers tests, alors c'est forcément la dernière, et il est inutile de la tester.
Il n'y a aucune différence jusqu'à l'avant dernier test : $\forall k \in [\![1, n-2]\!],\ \mathbf{P}(Y = k) = \dfrac{1}{n}$.

On a donc : $\mathbf{P}(Y = n-1) = \mathbf{P}(\Omega) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \mathbf{P}(Y = k)$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n} = 1 - \frac{n-2}{n} = \frac{2}{n}.$$

On calcule alors l'espérance de $Y$ : $\mathbf{E}(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k}{n} + (n-1) \times \frac{2}{n}$

donc $\mathbf{E}(Y) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{(n-2)(n-1)}{2} + \dfrac{2(n-1)}{n}$ d'où : $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2n}.}$

Pour la variance, on calcule d'abord $\mathbf{E}(Y^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k^2}{n} + (n-1)^2 \times \frac{2}{n}$,

donc $\mathbf{E}(Y^2) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} + \dfrac{2(n-1)^2}{n} = \dfrac{n-1}{6n}\left(2n^2 + 5n - 6\right)$.
On utilise ensuite la formule de König-Huygens :

$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \dfrac{n-1}{6n}\left(2n^2+5n-6\right) - \left(\dfrac{(n-1)(n+2)}{2n}\right)^2$

Après calculs, on trouve : $\mathbf{V}(Y) = \dfrac{n-1}{12n^2}\left(n^3+n^2-12n+12\right)$

et on peut factoriser : $\boxed{\mathbf{V}(Y) = \dfrac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-6)}{12n^2}.}$

**Exercice 10** : Les sauts de puce.

Loi de $S_n$ :

$S_n$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $\frac{1}{2}$ : $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\tfrac{1}{2}),\quad \mathbf{E}(S_n) = \tfrac{n}{2},\quad \mathbf{V}(S_n) = \tfrac{n}{4}.}$

Position $X_n$ de la puce après $n$ sauts :

On peut exprimer facilement $X_n$ en fonction de $S_n$. En effet,
si la puce a effectué $S_n$ sauts de taille 2, alors elle a aussi effectué $(n - S_n)$ sauts de taille 1.
Son abscisse après tous ces sauts est donc : $X_n = 2 \times S_n + 1 \times (n - S_n)$, donc $\boxed{X_n = n + S_n}$.

On en déduit par linéarité de l'espérance : $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = n + \mathbf{E}(S_n) = \tfrac{3n}{2}.}$

et par propriété de la variance : $\boxed{\mathbf{V}(X_n) = \mathbf{V}(S_n) = \tfrac{n}{4}}$.

Pour exprimer la loi de $X_n$, on décale de $n$ le support de $S_n$ : $\boxed{X_n(\Omega) = [\![n, 2n]\!].}$

Et on a : $\forall k \in [\![n, 2n]\!],\ [X_n = k] = [n + S_n = k] = [S_n = k - n]$,

donc $\forall k \in [\![n, 2n]\!],\ \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(S_n = k-n) = \binom{n}{k-n} p^{k-n} q^{n-(k-n)}$, où $p = \frac{1}{2}$ et $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

Après simplifications : $\boxed{\forall k \in [\![n, 2n]\!],\ \mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k-n}\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$

**Exercice 11** : Les ampoules défectueuses.

1) Conditionnement par boîtes dont le contenu ne provient que d'une seule machine.

$X$ est le nombre d'ampoules défectueuses dans une boîte de $n$ ampoules, donc $0 \leqslant X \leqslant n$ : $\boxed{X(\Omega) = [\![0, n]\!].}$
Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. Notons A l'événement : « La boîte ouverte provient de la machine A ».
Alors $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :
$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(X = k) + \mathbf{P}(\overline{A}) \times \mathbf{P}_{\overline{A}}(X = k)$.
L'énoncé donne : $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{4}$ donc $\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{1}{4}$.

Par ailleurs, $\mathbf{P}_A(X = k) = \binom{n}{k} 0,1^k \times 0,9^{n-k}$, et $\mathbf{P}_{\overline{A}}(X = k) = \binom{n}{k} 0,2^k \times 0,8^{n-k}$.

On obtient donc : $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{4} \times 0,1^k \times 0,9^{n-k} + \frac{1}{4} \times 0,2^k \times 0,8^{n-k}\right).}$

Le calcul de l'epérance donne : $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4} \times 0,1^k \times 0,9^{n-k} + \frac{1}{4} \times 0,2^k \times 0,8^{n-k}\right)$

donc par linéarité : $\mathbf{E}(X) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} 0,1^k \times 0,9^{n-k} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} 0,2^k \times 0,8^{n-k}$.

On reconnaît deux fois la formule de l'espérance pour une loi binomiale, donc : $\mathbf{E}(X) = \dfrac{3}{4} \times 0,1n + \dfrac{1}{4} \times 0,2n$.

En conclusion : $\boxed{\mathbf{E}(X) = \dfrac{n}{8}.}$

2) Une probabilité conditionnelle :

On demande $\mathbf{P}_{[X=0]}(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap [X=0])}{\mathbf{P}(X=0)} = \dfrac{\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(X=0)}{\mathbf{P}(X=0)} = \dfrac{\frac{3}{4} \times 0,9^n}{\frac{3}{4} \times 0,9^n + \frac{1}{4} \times 0,8^n}$.

Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}_{[X=0]}(A) = \dfrac{3 \times 0,9^n}{3 \times 0,9^n + 0,8^n} = \dfrac{3}{3 + \left(\frac{8}{9}\right)^n}.}$

3) Conditionnement par boîtes dont le contenu est mélangé.

Dans chaque boîte, chaque ampoule a maintenant 3 chances sur 4 de provenir de la machine A,
et 1 chance sur 4 de provenir de la machine B.

Pour chaque ampoule, la probabilité d'être défectueuse est donc : $p = \frac{3}{4} \times 0,1 + \frac{1}{4} \times 0,2 = \frac{1}{8}$.

La VAR $Y$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n$ et $p = \frac{1}{8}$.

$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{8}),\ \mathbf{E}(Y) = \frac{n}{8}.}$ On remarque que $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ : cette seconde façon de conditionner n'a pas changé le nombre moyen d'ampoules défectueuses par boîte.

**Exercice 12** : Détecter les erreurs

1) Erreurs détectées lors d'une seule relecture :

On note $X$ le nombre d'erreurs détectées lors d'une relecture.
Chaque erreur a une probabilité $p = 0,75$ d'être détectée, indépendamment des autres.
$X$ suit donc une loi binomiale de paramètres $k$ et $p = 0,75$.

$\boxed{\text{Le nombre moyen d'erreurs détectées lors d'une relecture est : } \mathbf{E}(X) = k \times p = 0,75k.}$

2) Erreurs détectées lors de 36 relectures indépendantes :

Chacune des $k$ erreurs a une probabilité $(1-p)^{36} = 0,25^{36} = 2^{-72}$ de ne jamais être détectée,
donc une probabilité $p' = 1 - 2^{-72}$ d'être détectée par au moins un des 36 relecteurs.
On note $Y$ le nombre d'erreurs détectées après 42 relectures.
Alors $Y$ suit une loi binomiale de paramètres $k$ et $p' = 1 - 2^{-72}$.
Son espérance vaut donc $\mathbf{E}(Y) = k(1 - 2^{-72})$.

**Exercice 8** :

L'écart $Z$ entre les numéros piochés est au minimum de 1 car on ne peut pas piocher deux fois la même boule, et au maximum de $n^2 - 1$, lorsque les boules numéro 1 et $n^2$ sont piochées.

Ainsi, $\boxed{Z(\Omega) = [\![1, n^2 - 1]\!].}$

Soit $k \in Z(\Omega)$. L'événement $[Z = k]$ est l'événement « l'écart entre les numéros piochés vaut $k$ », donc que les boules $\{1, k+1\}$ , ou $\{2, k+2\}$ ou …ou $\{n^2 - k, n^2\}$ ont été piochées.

Puisqu'il y a au total $\binom{n^2}{2} = \frac{n^2(n^2-1)}{2}$ tirages possibles, parmi lesquels $n^2 - k$ réalisent l'événement $[Z = k]$, on a par équiprobabilité : $\boxed{\forall k \in [\![1, n^2 - 1]\!],\ \mathbf{P}(Z = k) = \frac{2(n^2-k)}{n^2(n^2-1)}.}$

Enfin, $Z$ est un carré parfait si et seulement si $Z = 1$ ou 4 ou 9 ou …ou $(n-1)^2$.
Notons $C$ l'événement « $Z$ est un carré parfait ».

$$\begin{aligned}
\text{Alors } \mathbf{P}(C) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(Z = k^2) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(n^2-k^2)}{n^2(n^2-1)} \quad \text{d'après la loi de } Z, \\
&= \frac{2(n-1)n^2}{n^2(n^2-1)} - \frac{2}{n^2(n^2-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2, \quad \text{par linéarité de la somme, et en calculant la première somme, qui est une somme de constantes,} \\
&= \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n^2(n^2-1)} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \quad \text{d'après une somme usuelle,} \\
&= \frac{2}{n+1} - \frac{2(2n-1)}{6n(n+1)} \quad \text{après simplifications, puis on réduit :}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité que } Z \text{ soit un carré parfait est : } \frac{4n+1}{3n(n+1)}.}$