Corrigé du DS n°7

Exercice 1 : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

1. $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbf{R}^\star}$, centré en 0. $\forall x \neq 0,\ f(x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin(x)}{x} = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

2. $\forall x \neq 0,\ 0 \leqslant |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{\pm\infty} f = 0.}$
   La courbe représentative de f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $\pm\infty$.

3. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{0} f = 1.}$
   En posant $f(0) = 1$, on obtient donc un prolongement continu de f sur $\mathbf{R}$.

4. Soit $x \neq 0$. Par opérations, f est dérivable en x et $\boxed{f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.}$

5. Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 0 est : $\Delta_0(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.
   $\Delta_0(h) = \dfrac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \dfrac{\frac{\sin h - h}{h}}{h} = \dfrac{\sin h - h}{h^2} \sim -\dfrac{h}{6}$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_0(h) = 0$.
   Ainsi : $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0.}$

6. Soit $x \in [-2\pi, 2\pi]$. Alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ et $x \neq 0$
   $\Leftrightarrow x \in \{-2\pi, -\pi, \pi, 2\pi\}$.
   Sur les intervalles $[-2\pi, -\pi], [-\pi, \pi]$ et $[\pi, 2\pi]$, f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle : f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$.
   On sait donc que f' s'annule (au moins) une fois sur $]a, b[$.
   $\boxed{f' \text{ possède au moins trois racines, une dans chacun de ces intervalles.}}$

7. g est dérivable sur $\mathbf{R}$ par opérations et : $\forall x \in \mathbf{R},\ g'(x) = -x\sin(x)$.
   g' est donc du signe de $-\sin(x)$ sur $[0, 2\pi]$:

x	0		π		α		2π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0		
g	0	↘	$-\pi$	↗	0		2π

8. D'après le tableau de variations précédent, $g(x) = 0$ admet sur $[0, \pi]$ une unique solution : 0.
   Sur l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, g est strictement croissante et continue.
   Elle réalise donc une bijection de $[\pi, 2\pi]$ vers $[g(\pi), g(2\pi)] = [-\pi, 2\pi]$.
   $0 \in [-\pi, 2\pi]$ possède donc un unique antécédent $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ par g.

9. $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et le signe de $g(x)$ sur $[0, 2\pi]$ découle du tableau précédent.

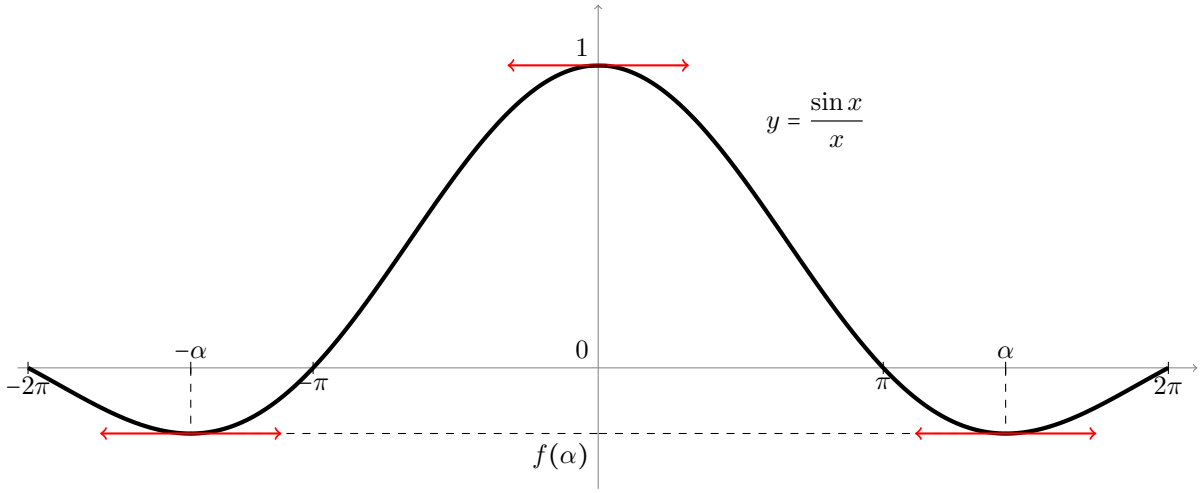
x	0		α		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	1	↘	$f(\alpha)$	↗	0

10. On voit dans ce tableau que $f(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha} < 0$.

    Mais $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = 0$, donc $\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \cos(\alpha)$.

    Finalement, $\cos(\alpha) < 0$. Ainsi, $\boxed{\alpha \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[}$.

11. Allure de la courbe représentative de f sur $[0, 2\pi]$:



    Rappel : f est paire, donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 2 : Variables aléatoires

1. X suit une loi uniforme : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket), \quad \mathbf{E}(X) = \dfrac{7}{2}, \quad \mathbf{V}(X) = \dfrac{35}{12}.}$

2. On peut piocher entre 0 et 6 fois la boule noire : $\boxed{Y(\Omega) = \llbracket 0, 6 \rrbracket.}$

3. Si $X = i$, alors on effectue i tirages dans l'urne, indépendants.

   Chacun peut donner un succès (piocher la boule noire) de probabilité $p = \dfrac{1}{n}$, ou un échec.

   Y compte donc le nombre de succès dans la répétition de i épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre $\dfrac{1}{n}$.

   $\boxed{\text{Lorsque } X = i,\ Y \text{ suit une loi binomiale de paramètres } i \text{ et } \dfrac{1}{n}.}$

4. Soit $j \in Y(\Omega) \setminus \{0\}$.

   Les événements $[X = 1], \cdots, [X = 6]$ forment un système complet d'événements.

   D'après la formule des probabilités totales : $\mathbf{P}(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \mathbf{P}(X = i) \times \mathbf{P}_{[X=i]}(Y = j)$.

   D'après les questions précédentes, $\mathbf{P}(X = i) = \dfrac{1}{6}$ indépendamment de i ;

   et si $j \leqslant i$, alors $\mathbf{P}_{[X=i]}(Y = j) = \binom{i}{j} p^j q^{i-j}$ avec $p = \dfrac{1}{n}$ et $q = 1 - p$.

   Mais si $j > i$, alors $[Y = j]$ est impossible : $\mathbf{P}_{[X=i]}(Y = j) = 0$.

   On obtient donc : $\boxed{\forall j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket,\ \mathbf{P}(Y = j) = \dfrac{1}{6} \displaystyle\sum_{i=j}^{6} \binom{i}{j} p^j q^{i-j} \quad \text{où } p = 1 - \dfrac{1}{n} \text{ et } q = 1 - p.}$

5. Par définition, $\mathbf{E}(Y) = \displaystyle\sum_{j \in Y(\Omega)} j \times \mathbf{P}(Y = j)$. Mais le terme correspondant à $j = 0$ est nul, donc :

   $$\mathbf{E}(Y) = \sum_{j=1}^{6} j \times \frac{1}{6} \sum_{i=j}^{6} \binom{i}{j} p^j q^{i-j} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{i} j \binom{i}{j} p^j q^{i-j} \quad \text{(somme double triangulaire)}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{i} i\binom{i-1}{j-1}p^j q^{i-j} \quad \text{(lemme du pion)}$$

$$= \frac{p}{6}\sum_{i=1}^{6} i\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}p^j q^{(i-1)-j} \quad \text{(glissement d'indices, et } p^{j+1} = p\times p^j\text{)}$$

$$= \frac{p}{6}\sum_{i=1}^{6} i(p+q)^{i-1} \quad \text{(somme de Newton, puis } p+q=1\text{)}$$

$$= \frac{p}{6}\times\frac{6\times 7}{2} \quad \text{(somme usuelle des premiers entiers naturels, puis } p=\frac{1}{n}\text{)}$$

En conclusion : $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{7}{2n}.}$

6. $\mathbf{E}(G) = \sum_{g\in G(\Omega)} g\times\mathbf{P}(G=g) = -a\times\mathbf{P}(G=-a) + \sum_{g=1}^{6} g\times\mathbf{P}(G=g)$

$$= -a\mathbf{P}(Y=0) + \sum_{g=1}^{6} g\times\mathbf{P}(Y=g), \quad \text{et on reconnaît } \mathbf{E}(Y)$$

Conclusion : $\boxed{\mathbf{E}(G) = \mathbf{E}(Y) - a\mathbf{P}(Y=0).}$

7. Il faut calculer $\mathbf{P}(Y=0)$.
D'après le SCE de la question **5.** et la FPT :

$$\mathbf{P}(Y=0) = \sum_{i=1}^{6}\mathbf{P}(X=i)\times\mathbf{P}_{[X=i]}(Y=0)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} q^i = \frac{q}{6}\sum_{i=0}^{5} q^5 = \frac{q}{6}\times\frac{1-q^6}{1-q} \quad \text{(somme géométrique de raison } q\neq 1\text{)}$$

donc $\mathbf{P}(Y=0) = \frac{q}{6}\times\frac{1-q^6}{p}$.

Finalement, $\mathbf{E}(G) = \frac{7}{2n} - a\times\frac{q}{6}\times\frac{1-q^6}{p}$ et en remplaçant $q=1-p$ et $p=\frac{1}{n}$,

on obtient : $\boxed{\mathbf{E}(G) = \frac{7}{2n} - \frac{a(n-1)}{6}\times\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^6\right).}$

8. Le jeu est équilibré quand le gain moyen est nul :

$\mathbf{E}(G) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{7}{2n}\times\frac{6}{n-1}\times\frac{1}{1-q^6}$, soit : $\boxed{a_n = \frac{21}{n(n-1)}\times\frac{1}{1-(\frac{n-1}{n})^6}.}$

D'une part : $n(n-1) \underset{+\infty}{\sim} n^2$, et d'autre part : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^6 - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{6}{n}$,

donc $1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^6 \underset{+\infty}{\sim} \frac{6}{n}$.

Par opérations sur les équivalents, $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{21}{n^2}\times\frac{n}{6}$ donc $\boxed{a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{7}{2n} = \mathbf{E}(Y).}$

9. **Simulation informatique**

```
import random as rd
def X():
    return rd.randint(1,6)
def urne(n) :
    return [1]+[0]*(n-1)
def Y(n) :
    x = X()
    U = urne(n)
    noires = 0
    for _ in range(x) :
        noires += rd.choice(U)
    return noires
```

```
def gain(n,a) :
    noires = Y(n)
    if noires > 0 : return noires
    else : return -a
def gainMoyen(n,a,N) :
    M = 0
    for _ in range(N) :
        M += gain(n,a)
    return M/N
```

Exercice 3 : Suite d'intégrales

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+\sin x}\,dx$$

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+\sin x}$ est continue sur $[0,1]$, car :
   - $x \mapsto x^n$ est continue sur $[0,1]$
   - $1+\sin x \geq 0$ sur $[0,1]$, et même strictement > 0

   Donc I_n est bien défini.
2. $\forall x \in [0,1] \Rightarrow x^{n+1} \leq x^n$. Ainsi :

   $$\frac{x^{n+1}}{1+\sin x} \leq \frac{x^n}{1+\sin x} \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$$

   Donc la suite (I_n) est décroissante.
3. $\forall x \in [0,1]$, on a $0 \leq \sin x \leq \sin 1 \leq 1$, donc :

   $$1 \leq 1+\sin x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+\sin x} \leq 1$$

   En multipliant par x^n (positif sur $[0,1]$), on obtient :

   $$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+\sin x} \leq x^n$$

4. On intègre sur $[0,1]$:

   $$\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

5. D'après l'encadrement :

   $$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow I_n \to 0 \quad \text{(théorème des gendarmes)}$$

6. On a :

   $$J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$$

   Posons $u(x) = \frac{1}{1+\sin x}$, alors : $u'(x) = \frac{-\cos x}{(1+\sin x)^2}$
   $v'(x) = x^n$, alors $v(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
   avec les fonctions u et v qui sont C1 sur $[0,1]$ donc par intégration par parties :

   $$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+\sin x}dx = \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{1+\sin x}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}J_n = \frac{1}{(n+1)(1+\sin 1)} + \frac{1}{n+1}J_n$$

7. On a :

   $$|J_n| \leq \int_0^1 \left|\frac{x^{n+1}\cos x}{(1+\sin x)^2}\right| dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+\sin x}dx = I_{n+1}$$

   (car $|\cos x| \leq 1$ et $(1+\sin x)^2 \geq 1$)
8. On a :

   $$I_n = \frac{1}{(n+1)(1+\sin 1)} + \frac{1}{n+1}J_n \quad \text{avec } |J_n| \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2} \Rightarrow \left|\frac{1}{n+1}J_n\right| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \to 0$$

   Donc :

   $$I_n \sim \frac{1}{n(1+\sin 1)} \quad \text{et } \lambda = \frac{1}{1+\sin 1}$$

$$\boxed{I_n \sim \frac{1}{n(1+\sin 1)}}$$

Exercice 4 : Une primitive de $f : x \longmapsto \sin(\ln x)$

1. Existence de primitives :
   f est continue sur $\mathbf{R}_+^\star$, donc elle y admet des primitives.
   Sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^\star$, si F est une primitive de f, alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions G telle que : $G = F + \lambda$, où λ est une constante réelle.
2. Une double PPP :
   On pose $u(t) = e^t$ et $v(t) = \sin(t)$. Alors u, v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, et :
   $\forall t \in \mathbf{R}$, $u'(t) = e^t$ et $v'(t) = \cos(t)$.
   Par primitivation par parties (PPP), on a : $\displaystyle\int \sin(t)e^t \,\mathrm{d}t = \sin(t)e^t - \int \cos(t)e^t \,\mathrm{d}t$.

   On pose maintenant $u(t) = e^t$ et $v(t) = \cos(t)$.
   Alors $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ et : $\forall t \in \mathbf{R}$, $u'(t) = e^t$ et $v'(t) = -\sin(t)$.
   Par seconde PPP, on a : $\displaystyle\int \cos(t)e^t \,\mathrm{d}t = \cos(t)e^t - \int (-\sin t)e^t \,\mathrm{d}t$.

   Finalement : $\displaystyle\int \sin(t)e^t \,\mathrm{d}t = \sin(t)e^t - \cos(t)e^t - \int \sin(t)e^t \,\mathrm{d}t$.

   Donc : $\displaystyle 2\int g(t)\,\mathrm{d}t = (\sin t - \cos t)e^t$ et $\boxed{\displaystyle\int \sin(t)e^t \,\mathrm{d}t = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + \lambda \ (\lambda \in \mathbf{R}).}$
3. Primitive de f :
   On effectue le changement de variables : $t = \ln x$. On a alors : $x = e^t$ donc $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t$, soit : $\boxed{\mathrm{d}x = e^t \,\mathrm{d}t.}$
   Il vient : $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(t)e^t \,\mathrm{d}t = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t)$ d'après la question précédente.
   Ainsi, $\displaystyle F(x) = \frac{e^{\ln x}}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$,
   soit : $\boxed{\displaystyle F(x) = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbf{R}_+^\star.}$