

**Programme de colles**  
**Semaine 27 du 19/05 au 23/05/2024**

### Chapitre 21 : Variables aléatoires

Dans le cadre du programme de 1<sup>ère</sup> année, toutes les VAR considérées sont à support fini. Bien que les couples de variables aléatoires ne soient plus au programme de première année, la notion de covariance a été définie en classe. L'implication : "indépendance"  $\Rightarrow$  "non corrélation" a été vue. Les propriétés de la covariance ont été vues dans le chapitre Statistiques (non évalué en colle, non exigible). Si un exercice de colle aborde ces notions, l'examineur sera prêt à rappeler les définitions, et les propriétés utiles.

- Définition, support (univers-image) d'une VAR, notations  $(X \in A)$ ,  $(X = x)$ ,  $(X \leq x) \dots$
- Composée d'une VAR par une fonction réelle.
- Loi d'une VAR, fonction de répartition, représentations graphiques.
- Lois usuelles : certaine, uniforme, de Bernoulli, binomiale.
- Espérance et propriétés de l'espérance, formule de transfert.
- Variance, écart-type, théorème de König-Huygens.
- Espérances et variances des lois usuelles.
- Indépendance de deux VAR  $X, Y$ . Conséquences sur  $\mathbf{E}(XY)$  et  $\mathbf{V}(X + Y)$ .

### Chapitre 22 : Polynômes

1. Définition, degré, ensembles  $\mathbf{K}[X]$  et  $\mathbf{K}_n[X]$ . Monôme dominant, coefficient dominant. Cas d'égalité.
2. Opérations : somme, produit par une constante, produit, composée. Conséquences sur le degré.
3. Dérivée, degré du polynôme dérivé.
4. Racines, multiplicité. Lien avec la factorisation, annulation des dérivées successives.
5. Polynôme scindé, théorème de D'Alembert-Gauss, décomposition dans  $\mathbf{C}[X]$  et dans  $\mathbf{R}[X]$ .

*Techniques exigibles :*

- \* Analyse des degrés dans une égalité entre polynômes.
- \* Identification des coefficients dans une égalité entre polynômes.
- \* Factorisation par  $(X - a)^m$  étant donnée une racine  $a$  de multiplicité  $m$ .
- \* Obtention de la multiplicité d'une racine par examen des dérivées successives.

#### Liste des questions de cours :

1. Définir l'espérance et la variance d'une VAR, puis énoncer le théorème de König-Huygens.
2. Propriétés de l'espérance, et définition d'une VAR centrée.
3. Donner (*sans démonstration*) une loi usuelle, son espérance et sa variance.  
*On prendra soin en particulier de donner précisément le support.*
4. Définition de l'indépendance de deux VAR  $X$  et  $Y$ . Conséquence pour  $\mathbf{E}(XY)$  et  $\mathbf{V}(X + Y)$ .
5. Si  $P, Q \in \mathbf{K}[X]$  de degrés respectifs  $n, m \geq 0$ , donner les degrés de :  $P + Q$ ,  $P \times Q$ ,  $P \circ Q$ ,  $P'$ .  
*On pourra distinguer plusieurs cas concernant  $P + Q$ .*
6. Double caractérisation de :  $\alpha \in \mathbf{K}$  est racine de  $P \in \mathbf{K}[X]$  de multiplicité  $m \in \mathbf{N}^*$ .
7. **Exercice-type** : Factoriser dans  $\mathbf{R}[X]$  le polynôme :  $4X^4 - 12X^3 + 9X^2 + 2X - 3$ .  
*L'examineur pourra proposer tout autre polynôme impliquant les mêmes techniques.*

#### Informatique (en langage *Python*) :

1. Déclaration d'une variable : affectation (=)
2. Importations à partir du module `math`.
3. Syntaxe de définition d'une fonction.
4. Boucle `for` ou `while`. Applications aux calculs de sommes ou de produits.
5. Booléens `True`, `False`, comparaisons (`==`, `!=`, `>`, `>=`, `<`, `<=`), tests.
6. Listes, chaînes de caractères et tuples. Indexation, extraction, concaténation.
7. Modules `matplotlib.pyplot` (`plt`) et `numpy` (`np`) : représentations graphiques.

8. Fonctions récursives : cas de base, appel récursif.
9. Simulation du hasard : le module `random` (`rd`).
10. Algorithme de dichotomie (corollaire 1 du TVI).
11. Calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur  $[a, b]$  par la "méthode des rectangles".

Mots clés à connaître : `from import as def return for while if elif else`

Fonctions à connaître : `range len append np.linspace plt.plot plt.show rd.random rd.randint rd.choice`

*Bon courage à tous !*