

Applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

I Définitions, premières propriétés

1 Application linéaire

DÉFINITION

Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbf{K}$ – *ev*. On considère $f : E \rightarrow F$.

On dit que f est une **application linéaire** de E dans F (ou *morphisme*) lorsque :

- $\forall u, v \in E, \quad f(u + v) = f(u) + f(v) ;$
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ ou simplement $\mathcal{L}(E, F)$.

Cas particuliers :

- Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.
- Si $f : E \rightarrow E$ est linéaire, on dit que f est un **endomorphisme**.
Leur ensemble est noté $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ ou simplement $\mathcal{L}(E)$.
- Si $f : E \rightarrow E$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **automorphisme**.
Leur ensemble est noté $\mathcal{GL}_{\mathbf{K}}(E)$ ou simplement $\mathcal{GL}(E)$.

Exemples :

- On sait qu'une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *linéaire* lorsqu'il existe une constante a telle que :
 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = ax.$

- Soit $k \in \mathbf{K}$. L'application $h_k : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto kx \end{cases}$ est appelée **homothétie de E de rapport k** .
 h_k est un endomorphisme de E . Si $k \neq 0$, alors h_k est de plus un automorphisme de E .

- $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + 2y, -x, 3y) \end{cases}$ est une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$.

De façon générale : toute application de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^p$ dont l'expression est du type :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_{1,k} x_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_{p,k} x_k \right)$$

où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} \in \mathbf{K}$, est une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^p$.

- Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $p_i : \begin{cases} \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i \end{cases}$ est une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}$, appelée *projection* sur la $i^{\text{ème}}$ coordonnée.

Quand l'ensemble d'arrivée de l'application linéaire est $\mathbf{K}$, on parle de **forme linéaire**.

- $\int : \begin{cases} \mathcal{C}^0[a, b] \rightarrow \mathbf{R} \\ f \mapsto \int_a^b f \end{cases}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0[a, b]$, le $\mathbf{R}$ -ev des fonctions continues sur $[a, b]$.

- $d : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ est un endomorphisme de l'ensemble des fonctions réelles infiniment dérivables.

CADRE DU CHAPITRE : Nous n'étudierons par la suite que des applications linéaires de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^p$, où n, p sont des entiers naturels. Dans toute la suite, E et F désignent donc respectivement $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^p$, les résultats restant valables pour des espaces vectoriels quelconques (éventuellement de dimension infinie).

2 Caractérisation

PROPOSITION

Soit $f : E \rightarrow F$. Alors f est linéaire si, et seulement si :

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

PROPOSITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- $f(0_E) = 0_F$.
- $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbf{K}, \quad \forall u_1, \dots, u_q \in E, \quad f\left(\sum_{i=1}^q \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^q \lambda_i f(u_i).$

Par contraposée : si $f(0_E) \neq 0_F$, alors f n'est pas linéaire.

3 Ensemble d'applications linéaires

$\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

$\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E .

$\mathcal{GL}(E, F)$ est l'ensemble des isomorphismes de E vers F .

$\mathcal{GL}(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E .

PROPOSITION

| $\mathcal{L}(E, F)$ est stable par combinaisons linéaires.

On retient :

Si f et g sont linéaires, si $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est linéaire.
--

$\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ sont des $\mathbf{K}$ -ev

4 Composition d'applications linéaires

PROPOSITION

- La composée d'applications linéaires est une application linéaire.
- Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est une application linéaire.

COROLLAIRE

- La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.
- La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

II Noyau et image d'une application linéaire

1 Images directes et réciproques d'un s-ev par une application linéaire

PROPOSITION

Soient E, F , deux $\mathbf{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Pour tout s-ev E_1 de E , l'ensemble $f(E_1)$ est un s-ev de F .
- Pour tout s-ev F_1 de F , l'ensemble $f^{-1}(F_1)$ est un s-ev de E .

On retient : Les images directes et réciproques de s-ev par une application linéaire sont des s-ev.

2 Noyau et image d'une application linéaire

DÉFINITION

Soient E, F , deux $\mathbf{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau** de f , et on note $\text{Ker}(f)$ l'ensemble des vecteurs de E d'image 0_F .

$$\text{Ker } f = \{u \in E, f(u) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

- On appelle **image** de f , et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de E .

$$\text{Im } f = \{v \in F, \exists u \in E, v = f(u)\} = f(E)$$

À retenir : Déterminer le noyau d'une application linéaire f , c'est résoudre l'équation $f(u) = 0$.

PROPOSITION

Soient E, F , deux $\mathbf{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- $\text{Ker } f$ est un s-ev de E .
- $\text{Im } f$ est un s-ev de F .

3 Injectivité et surjectivité des applications linéaires

PROPOSITION

Soient E, F deux $\mathbf{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_E\}$.
- f est surjective $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$.

III Action d'une application linéaire sur une base

1 Image d'une base par une application linéaire

THÉORÈME

Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
Alors pour tout n -uplet $(b_1, \dots, b_n)$ de F^n , il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait : $f(e_i) = b_i$.

On retient :

Une application linéaire est entièrement déterminée par son action, par ailleurs arbitraire, sur une base.
--

Exercice :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ telle que $f(e_1) = (2, 5, 0)$ et $f(e_2) = (-1, 1, 4)$. Déterminer alors $f(u)$ pour $u = (2, -1) \in \mathbf{R}^2$.

Remarque : tel qu'il est formulé (et en accord avec le programme de première année), le théorème impose que l'espace vectoriel E soit de dimension finie. Il est cependant encore vrai même si E est de dimension infinie, du moment qu'on en connaît une base et qu'on connaît l'image de cette base par f (c'est-à-dire les images par f de tous les vecteurs de cette base).

2 Rang d'une application linéaire

PROPRIÉTÉ

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors :

- f est injective si, et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F ;
- f est surjective si, et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F ;
- f est bijective si, et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

- On a de plus :
- f injective implique : ou bien F est de dimension infinie, ou bien F est de dimension finie et $\dim E \leq \dim F$;
 - f surjective implique : F est de dimension finie et $\dim E \geq \dim F$;
 - f bijective implique : F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$.

Exemples : il n'existe aucune injection ni bijection de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$, mais il existe des surjections.
Il n'existe aucune surjection ni bijection de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^5$, mais il existe des injections.
Il existe une bijection de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ si et seulement si $n = p$.

DÉFINITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **rang** de l'application linéaire f , et on note $\text{rg}(f)$, la dimension du s-ev $f(E)$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base quelconque de E , alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \dim(\text{Im } f)$.

3 Théorème du rang

THÉORÈME **Théorème du rang**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.

Alors : $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim E$, ou encore : $\dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f) = \dim E$.

4 Conséquence

Cas où $\dim E = \dim F$:

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\dim E = \dim F$, alors : f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.

Attention : le résultat est faux pour les endomorphismes en dimension infinie.

Contre-exemple : on pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbf{R}$.

Soit $d \in \mathcal{L}(E)$, définie par $\forall f \in E, d(f) = f'$, qui est bien une application linéaire.

Alors $\text{Ker}(d) = \{f \in E, f' = 0\} = \mathbf{R}_0[X] \neq \{0\}$ donc d n'est pas injective.

Mais d est surjective, car toute fonction $f \in E$ possède une primitive F , donc $d(F) = f$.

IV Représentations matricielles (E et F de dimensions finies)

1 Matrice d'une application linéaire

DÉFINITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F .
On appelle **matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** la matrice de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}'$. On la note $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{p,1} & \lambda_{p,2} & \cdots & \lambda_{p,n} \end{pmatrix} \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(e_i) = \lambda_{1,i} \cdot e'_1 + \cdots + \lambda_{p,i} \cdot e'_p$$

Cas particuliers :

- Si f est un endomorphisme de E , on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. C'est une matrice carrée.
- Si f est une forme linéaire ($p = 1$), la matrice de f est une matrice-ligne.
- Soit E un espace vectoriel de dimension n , et muni d'une base $\mathcal{B}$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$

Exemple
Soient $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y, 3y) \end{cases}$ et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.

PROPOSITION

| Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors pour toutes bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E et F , on a : $\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))$.

En pratique : on détermine la dimension de $\text{Ker } f$ et on trouve $\text{rg}(f)$ d'après le théorème du rang.

2 Image d'un vecteur par une application linéaire

PROPOSITION

Soient E, F deux $\mathbf{K}$ -ev de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

⌋

Exercice : Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y, 3y) \end{cases}$.

On pose $u = (5, -2) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer $f(u)$ de deux manières.

3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

DÉFINITION

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

On appelle **application linéaire canoniquement associée à A** l'application $f_A \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^p)$ définie par :

$$f_A : \begin{cases} \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^p \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_p) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sa matrice dans les bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^p$ est A .

4 Opérations sur les matrices

Somme, produit par un scalaire : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E et F , soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$;
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

Composée d'applications linéaires : Soient E, F, G des espaces vectoriels de bases finies $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$.

On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors : $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)}$

En particulier, si f est un endomorphisme de E et si $k \in \mathbf{N}$, alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$.

Remarque : f^k désigne ici la composée $k^{\text{ième}}$ de f par elle-même.

Remarque importante :

la définition même du produit matriciel (compliquée on s'en souvient) a été pensée précisément pour cela.

Une composée d'applications linéaires correspond à un produit matriciel.

Réciproque d'un isomorphisme

THÉORÈME

Soient E, F des $\mathbf{K}$ -ev de dimensions finies et de bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ est inversible.

Dans ce cas, $\dim E = \dim F$ et $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))^{-1}}$

5 Matrice de passage

PROPRIÉTÉ

Soit E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie, muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$.

6 Changement de base

THÉORÈME Formule de changement de bases pour une application linéaire

On considère :

E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

F un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. On note $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Alors :

$$A' = Q^{-1}AP$$

COROLLAIRE Formule de changement de bases pour un endomorphisme

On considère :

E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On considère $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 2))$.

1. Donner l'expression de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ canoniquement associée à la matrice A .
2. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^2$, écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer P^{-1} .
4. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$.