Devoir Maison n°8

Exercice 1 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$

On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.
On note Id l'application identité de $\mathbf{R}^3$.

1. a. Déterminer le rang de f. En déduire son noyau et son image.
   b. Factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $Q(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$.
   c. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Déterminer, en fonction de λ, le rang de l'application $(f - \lambda\mathrm{Id})$.
   d. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

On pose $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$ et $w = (4, 2, 1)$.

2. a. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
   b. Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$, qu'on notera P.
   c. Pourquoi P est-elle inversible ?
      Déterminer P^{-1}.
   d. Exprimer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w.
   e. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, qu'on notera D.
   f. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.
   g. Soit $n \in \mathbf{N}$, exprimer A^n en fonction de D, P et P^{-1}.

On rappelle que pour tout entier n, f^n désigne la composée de f avec elle-même n fois.

3. a. Vérifier que $f^3 = 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}$.
   b. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de I_3, A et A^2,
      où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
   c. Montrer que pour tout entier naturel n il existe un triplet (a_n, b_n, c_n) dans $\mathbf{R}^3$ tel que :
      $$A^n = a_n I_3 + b_n A + c_n A^2$$
   d. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $D^n = a_n I_3 + b_n D + c_n D^2$.
   e. En déduire pour tout entier naturel n les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
      Les formules obtenues sont-elles encore valables lorsque $n = -1$?

Exercice 2 : Une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes (P_n) par : $\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ \forall n \geqslant 0,\ P_{n+1}(x) = x.P_n(x) - P_n'(x) \end{cases}$

1. Déterminer les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4.
2. Factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ les polynômes P_2, P_3 et P_4.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, le monôme dominant de P_n est x^n.

On rappelle qu'un polynôme Q est pair, et vérifie donc : $\forall x \in \mathbf{R}$, $Q(-x) = Q(x)$, si et seulement si tous ses monômes de degrés impairs sont nuls, et qu'il est impair, et vérifie donc : $\forall x \in \mathbf{R}$, $Q(-x) = -Q(x)$, si et seulement si tous ses monômes de degrés pairs sont nuls.

4. Montrer que, si $Q \in \mathbf{R}[X]$ est pair, alors Q' est impair, et que si Q est impair, alors Q' est pair.
5. En déduire que :
   - si n est pair, alors P_n est pair,
   - si n est impair, alors P_n est impair.