# Corrigé du DM n°8

**Exercice 1 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$**

**1a) <u>Rang, image et noyau de $f$</u>**

Le rang de $f$ est le rang de $A$. On repère 3 pivots : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{-2} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\mathrm{rg}\, f = 3.}$

Puisque $f$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$, on en déduit que <u>$f$ est bijectif</u>, donc $\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \{0\} \text{ et } \mathrm{Im}\, f = \mathbf{R}^3.}$

**1b) <u>Une factorisation utile</u>**

On repère que 1 est racine de $Q$, qui peut donc se factoriser par $(x-1)$ : on peut écrire $Q(x) = (x-1)R(x)$ avec $R$ de degré 2 : $R(x) = ax^2 + bx + c$.
Par examen des coefficients dominants : $a = -1$, et par examen des termes constants : $c = 2$.
Les termes de degré 2 valent $2x^2$ dans $Q(x)$ et $(1+b)x^2$ dans $(x-1)R(x)$, donc $b = 1$.
Ainsi, $Q(x) = (x-1)(-x^2+x+2)$.
On poursuit en utilisant le discriminant $\Delta$ de $R(x)$ (ou en repérant d'autres racines évidentes).
On obtient au final : $\boxed{Q(x) = -(x-1)(x+1)(x-2).}$

**1c) <u>Spectre de $f$</u>**

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. La matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{Id}$ est $A - \lambda I_3$, où $I_3$ désigne la matrice-identité de taille 3. La question est donc d'étudier le rang de la matrice $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ \boxed{1} & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2+2\lambda+1 & -2 \\ \boxed{1} & -\lambda & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & Q(\lambda) \\ \boxed{1} & -\lambda & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{où } Q(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2.$$

Le rang de $f - \lambda\mathrm{Id}$ vaut donc 2 si $Q(\lambda) = 0$, et 3 sinon.
D'après la question précédente, $Q(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, -1$ ou 2.
Conclusion : $\boxed{\text{si } \lambda \in \{-1, 1, 2\}, \text{ alors } \mathrm{rg}(f - \lambda\mathrm{Id}) = 2, \text{ et sinon } \mathrm{rg}(f - \lambda\mathrm{Id}) = 3.}$

*Remarque : l'ensemble $\{-1, 1, 2\}$ est appelé le spectre de $f$* (voir l'année prochaine).

**1d) <u>Base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id})$, pour $\lambda$ élément du spectre de $f$.</u>**

$*$ $\lambda = 1$. On résout $(f - \mathrm{Id})(x, y, z) = (0, 0, 0)$, pour un vecteur $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, donc : $f(x, y, z) = (x, y, z)$.

$$f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = x \\ x = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z. \text{ Ainsi, } \boxed{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(u), \text{ où } u = (1,1,1)}.$$

$*\lambda = -1$. On résout $(f + \mathrm{Id})(x, y, z) = (0, 0, 0)$ donc $f(x, y, z) = -(x, y, z)$.

$$f(x,y,z) = -(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = -x \\ x = -y \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}. \text{ Ainsi, } \boxed{\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(v), \text{ où } v = (1,-1,1)}.$$

$*\lambda = 2$. On résout $(f - 2\mathrm{Id})(x, y, z) = (0, 0, 0)$ donc $f(x, y, z) = 2(x, y, z)$.

$$f(x,y,z) = 2(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 2x \\ x = 2y \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \end{cases}. \text{ Ainsi, } \boxed{\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(w), \text{ où } w = (4,2,1)}.$$

**2a & b) <u>Une nouvelle base de $\mathbf{R}^3$</u>**

Soit $\mathcal{B}$ la famille $(u, v, w)$. Alors la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On étudie le rang de $P$ : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix} = 3$, donc $P$ est inversible et $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$

La matrice $P$ est donc la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

**2c) <u>Inverse de $P$</u>**

$P$ est inversible car c'est une matrice de passage d'une base à une autre (on vient de voir que $\mathrm{rg}(P) = 3$).

On reprend l'échelonnement de $P$, en répétant les opérations sur la matrice $I_3$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

Conclusion : l'inverse de $P$ est $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

**2d) Image par $f$ des vecteurs $u, v, w$**

D'après la question **1d)**, $u, v, w$ engendrent respectivement $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}), \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$, donc $\boxed{f(u) = u,\ f(v) = -v,\ f(w) = 2w.}$

**2e) Matrice de $f$ relativement à la base $\mathcal{B}$**

D'après la question précédente, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(1, -1, 2).}$

**2f) Expression de $A$ en fonction de $D$**

D'après la formule de changement de bases : $\boxed{A = PDP^{-1}.}$

**2g) Expression des puissances de $A$**

Par récurrence immédiate : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.}$

**3a) Une expression de $f^3 = f \circ f \circ f$**

On calcule $A^3 - 2A^2 - A = PD^3P^{-1} - 2PD^2P^{-1} - PDP^{-1} = P(D^3 - 2D^2 - D)P^{-1}$ d'après **2g**

Le calcul de $D^3 - 2D^2 - D$ est rapide (matrice diagonale), et on trouve : $D^3 - 2D^2 - D = -2I_3$.

Ainsi, $A^3 - 2A^2 - A = P(-2I_3)P^{-1} = -2PP^{-1} = -2I_3$.

donc $A^3 = 2A^2 + A - 2I_3$, soit $\boxed{f^3 = 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}.}$

**3b) Expression de l'inverse de $A$**

La relation précédente donne : $A^3 - 2A^2 - A = -2I_3$, donc $A(A^2 - 2A - I_3) = -2I_3$,
et finalement $A\left(-\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I_3)\right) = I_3$. Cette relation est de la forme $AB = I_3$ donc prouve que $A$ est inversible (on le savait déjà) et que $B$ est l'inverse de $A$.

Conclusion : $\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I_3.}$

**3c) Expression de $A^n$ en fonction de $I_3, A$ et $A^2$**

Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $\mathcal{P}_n$ la propriété : « il existe $a_n, b_n, c_n \in \mathbf{R}$ tels que $A^n = a_nI_3 + b_nA + c_nA^2$ ».
$\star$ Initialisations pour $n = 0, 1, 2$ :
$A^0 = I_3 = 1 \times I_3 + 0 \times A + 0 \times A^2$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie, avec $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.
$A^1 = A = 0 \times I_3 + 1 \times A + 0 \times A^2$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie, avec $a_1 = c_1 = 0$, $b_1 = 1$.
$A^2 = 0 \times I_3 + 0 \times A + 1 \times A^2$ donc $\mathcal{P}_2$ est vraie, avec $a_2 = b_2 = 0$, $c_2 = 1$.

$\ast$ Hérédité à partir de $n = 0$. Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

Alors $A^{n+1} = A.A^n = A(a_n I_3 + b_n A + c_n A^2)$ d'après $\mathcal{P}_n$,

$= a_n A + b_n A^2 + c_n A^3 = a_n A + b_n A^2 + c_n(2A^2 + A - 2I_3)$, d'après la question **3a)**,

$= -2c_n I_3 + (a_n + c_n)A + (b_n + 2c_n)A^2$, donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, avec $\begin{cases} a_{n+1} = -2c_n \\ b_{n+1} = a_n + c_n \\ c_{n+1} = b_n + 2c_n \end{cases}$

$\ast$ Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire à partir du rang $n = 0$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \exists a_n, b_n, c_n \in \mathbf{R},\ A^n = a_n I_3 + b_n A + c_n A^2.}$$

**3d) Expression pour $D^n$**

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $D^n = \left(P^{-1}AP\right)^n = P^{-1}A^nP = P^{-1}(a_n I_3 + b_n A + c_n A^2)P$ d'après **3c)**

$= a_n P^{-1} I_3 P + b_n P^{-1} A P + c_n P^{-1} A^2 P = \boxed{a_n I_3 + b_n D + c_n D^2 = D^n.}$

**3e) Expressions de $a_n, b_n, c_n$**

$D = \mathrm{Diag}(1, -1, 2)$ donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $D^n = \mathrm{Diag}(1, (-1)^n, 2^n)$.

D'autre part, $D^2 = (1, 1, 4)$ donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n I_3 + b_n D + c_n D^2 = \mathrm{Diag}(a_n + b_n + c_n,\ a_n - b_n + c_n,\ a_n + 2b_n + 4c_n)$

D'après la question précédente, et par identification, on a :

$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} 1 = a_n + b_n + c_n \\ (-1)^n = a_n - b_n + c_n \\ 2^n = a_n + 2b_n + 4c_n \end{cases}$. On résout ce système :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = \frac{1}{3}\left(3 + (-1)^n - 2^n\right),\ b_n = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right), \text{ et } c_n = \frac{1}{6}\left(2^{n+1} + (-1)^n - 3\right).}$$

On peut vérifier qu'on retrouve bien avec ces formules :

$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0$

$a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ c_1 = 0$

$a_2 = 0,\ b_2 = 0,\ c_2 = 1$

et en remplaçant $n$ par $-1$ (ce que rien pour l'instant ne justifie), on trouve : $a_{-1} = \frac{1}{2}$, $b_{-1} = 1$, $c_{-1} = -\frac{1}{2}$.

Or, on a vu que : $A^{-1} = \frac{1}{2}I_3 + A - \frac{1}{2}A^2$, donc $\boxed{\text{la formule est encore valable pour } n = -1.}$

## Exercice 2 : $P_{n+1} = XP_n - P_n'$

1. $P_1(x) = xP_0(x) - P_0'(x) = 1 \times x - 0 = x$
   $P_2(x) = xP_1(x) - P_1'(x) = x^2 - 1$
   $P_3(x) = xP_2(x) - P_2'(x) = x(x^2 - 1) - 2x = x^3 - 3x$
   $P_4(x) = xP_3(x) - P_3'(x) = x(x^3 - 3x) - (3x^2 - 3) = x^4 - 6x^2 + 3$
2. $P_2(x) = (x - 1)(x + 1)$
   $P_3(x) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$
   $P_4(x) = t^2 - 6t + 3$ en posant $t = x^2$. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 24 > 0$
   $t_1 = \dfrac{6 - \sqrt{24}}{2} = 3 - \sqrt{6}$ et $t_2 = 3 + \sqrt{6}$ donc $P_4(x) = (x^2 - 3 + \sqrt{6})(x^2 - 3 - \sqrt{6})$
   $t_1, t_2 > 0$ donc : $P_4(x) = \left(x - \sqrt{3 - \sqrt{6}}\right)\left(x + \sqrt{3 - \sqrt{6}}\right)\left(x - \sqrt{3 + \sqrt{6}}\right)\left(x + \sqrt{3 + \sqrt{6}}\right)$
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$ : "$P_n(x) = x^n + Q_n(x)$ avec $\deg(Q_n) < n$ ".
   $\ast$ Initialisation pour $n = 0$ : $P_0 = x^0 + Q_0$ avec $Q_0 = 0$ donc $\deg Q_0 = -\infty < 0$. $\mathcal{P}_0$ vraie.
   $\ast$ Hérédité à partir de $n = 0$ : soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.
   Alors $P_{n+1}(x) = xPn(x) - P_n'(x) = x(x^n + Q_n(x)) - (nx^{n-1} + Q_n'(x))$
   $= x^{n+1} + Q_{n+1}(x)$ avec $Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - nx^{n-1} - Q_n'(x)$
   Or, $\deg Q_n < n$ donc $\deg(xQ_n(x)) < n + 1$ et $\deg Q_n'(x) < n - 1$ donc $\deg Q_{n+1} < n + 1$.
   Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.
   $\ast$ Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0, \text{ le monôme dominant de } P_n \text{ est } x^n.}$

4. Soit $Q$ un polynôme pair :

   $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$ car seuls ses monômes de degrés pairs sont éventuellement non nuls.

   En dérivant : $Q'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2k.a_k x^{2k-1}$ qui n'a que des monômes de degrés impairs, donc $Q'$ est impair.

   De façon analogue, si $Q$ est un polynôme impair :

   $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1}$ car seuls ses monômes de degrés impairs sont éventuellement non nuls.

   En dérivant : $Q'(x) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1).a_k x^{2k}$ qui n'a que des monômes de degrés pairs, donc $Q'$ est pair.

5. Soit $k \in \mathbf{N}$. On pose $\mathcal{Q}_k$ : "$P_{2k}$ est pair, et $P_{2k+1}$ est impair ".

   $\star$ Initialisation pour $k = 0$ : $P_0 = 1$ est pair, $P_1(x) = x$ donc $P_1$ est impair. Ainsi $\mathcal{Q}_0$ vraie.

   $\star$ Hérédité à partir de $k = 0$ : soit $k \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{Q}_k$ vraie.

   Alors $P_{2(k+1)}(-x) = P_{2k+2}(-x) = (-x)P_{2k+1}(-x) - P'_{2k+1}(-x)$.

   Par hypothèse de récurrence, $P_{2k+1}$ est impair, donc $P_{2k+1}(-x) = -P_{2k+1}(x)$,

   et $P'_{2k+1}$ est donc pair d'après **4)**, donc $P'_{2k+1}(-x) = P'_{2k+1}(x)$.

   Il vient : $P_{2k+2}(-x) = (-x)(-P_{2k+1}(x)) - P'_{2k+1}(x) = xP_{2k+1}(x) - P'_{2k+1}(x) = P_{2k+2}(x)$.

   Ainsi, $P_{2k+2}$ est pair.

   De même : $P_{2k+3}(-x) = (-x)P_{2k+2}(-x) - P'_{2k+2}(-x)$, avec $P_{2k+2}$ pair donc

   $P_{2k+2}(-x) = P_{2k+2}(x)$ , et $P'_{2k+2}$ impair d'après **4)** donc $P'_{2k+2}(-x) = -P'_{2k+2}(x)$.

   Ainsi, $P_{2k+3}(-x) = (-x)P_{2k+2}(x) - (-P'_{2k+2}(x)) = -xP_{2k+2}(x) + P'_{2k+2}(x) = -P_{2k+3}(x)$.

   Ainsi, $P_{2k+3}$ est impair. Ceci montre que $\mathcal{Q}_{k+1}$ est vraie.

   $\star$ Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}_k$ est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \text{ si } n \text{ est pair alors } P_n \text{ est pair, et si } n \text{ est impair, alors } P_n \text{ est impair.}}$