

Exercice 4 : Factorisations diverses

* $T(x) = x^6 + x^3 + 1$ On pose $\tilde{T}(x) = x^2 + x + 1$, de sorte que : $T(x) = \tilde{T}(x^3)$.

On factorise $\tilde{T}$, de degré 2, à l'aide de son discriminant : $\tilde{T}(x) = (x - j)(x - \bar{j})$, où $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

On a donc : $T(x) = (x^3 - j)(x^3 - \bar{j})$.

Pour factoriser $(x^3 - j)$, on en cherche les racines en résolvant dans $\mathbf{C}$ l'équation : $x^3 - j = 0$.

Sous forme exponentielle, $x = re^{i\theta}$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. L'équation s'écrit : $(re^{i\theta})^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

On obtient 3 racines distinctes dans $\mathbf{C}$, pour $k = 0, 1$ ou 2 .

Pour les autres entiers k , on retrouve ces mêmes racines, avec un argument décalé d'un multiple de 2π .

$$\text{Ainsi : } x^3 - j = \left(x - e^{\frac{2i\pi}{9}}\right) \left(x - e^{\frac{8i\pi}{9}}\right) \left(x - e^{\frac{14i\pi}{9}}\right).$$

On obtient : $x^3 - \bar{j} = \left(x - e^{-\frac{2i\pi}{9}}\right) \left(x - e^{-\frac{8i\pi}{9}}\right) \left(x - e^{-\frac{14i\pi}{9}}\right)$, en appliquant le conjugué.

$$\text{Dans } \mathbf{C}, \text{ il vient donc : } T(x) = \left(x - e^{\frac{2i\pi}{9}}\right) \left(x - e^{\frac{8i\pi}{9}}\right) \left(x - e^{\frac{14i\pi}{9}}\right) \left(x - e^{-\frac{2i\pi}{9}}\right) \left(x - e^{-\frac{8i\pi}{9}}\right) \left(x - e^{-\frac{14i\pi}{9}}\right).$$

Pour obtenir une factorisation dans $\mathbf{R}$, on regroupe 2 à 2 les facteurs conjugués, en utilisant :

$$\forall z \in \mathbf{C}, (x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(z)x + |z|^2,$$

$$\text{et en particulier si } z = e^{i\varphi} : (x - e^{i\varphi})(x - e^{-i\varphi}) = x^2 - 2\cos(\varphi)x + 1.$$

$$\text{Conclusion : } T(x) = \left(x^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)x + 1\right) \left(x^2 - 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)x + 1\right) \left(x^2 - 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)x + 1\right).$$

Remarque : on écrira $\cos(4\pi/9)$ plutôt que $\cos(14\pi/9)$.

Remarque 2 : on a factorisé T en un produit de 3 trinômes de discriminant strictement négatif.

Remarque 3 : si on développe la forme factorisée, on retrouve bien sûr l'expression du départ, donc en notant $a = \cos(2\pi/9)$, $b = \cos(8\pi/9)$ et $c = \cos(4\pi/9)$:

$$T = x^6 - 2(a+b+c)x^5 + (3+4ab+4ac+4bc)x^4 - 4(a+b+c+2abc)x^3 + (3+4ab+4ac+4bc)x^2 - 2(a+b+c)x + 1$$

$$\text{donc par identification des coefficients, et après simplifications : } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + ac + bc = -\frac{3}{4} \\ abc = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$* U(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Il faut repérer une somme géométrique de raison x : si $x \neq 1$, $U(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$.

On factorise ensuite l'expression $\tilde{U}(x) = x^5 - 1$, en résolvant dans $\mathbf{C}$ l'équation $x^5 = 1$.

$$\text{Sous forme exponentielle : } (re^{i\theta})^5 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 1 \\ 5\theta = 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

On trouve les 5 racines distinctes avec $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$: $x = 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}$ ou $e^{\frac{8i\pi}{5}}$.

$$\text{Ainsi, } \tilde{U}(x) = (x - 1) \left(x - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \left(x - e^{\frac{4i\pi}{5}}\right) \left(x - e^{\frac{6i\pi}{5}}\right) \left(x - e^{\frac{8i\pi}{5}}\right).$$

$$\text{Et puisque } U(x) = \frac{\tilde{U}(x)}{x - 1}, \text{ il vient : } U(x) = \left(x - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \left(x - e^{\frac{4i\pi}{5}}\right) \left(x - e^{\frac{6i\pi}{5}}\right) \left(x - e^{\frac{8i\pi}{5}}\right).$$

On regroupe les facteurs conjugués 2 à 2 pour faire apparaître la factorisation dans $\mathbf{R}$:

$$U(x) = \left(x^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)x + 1\right) \left(x^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)x + 1\right)$$

Remarque : en développant, on a les valeurs exactes de $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$ (voir exercice 2, DS3).

* $V(x) = 2x^6 + i \in \mathbf{C}[X]$. On cherche à le factoriser dans $\mathbf{C}$, en cherchant ses racines :

$$V(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 = -\frac{i}{2} \Leftrightarrow (re^{i\theta})^6 = \frac{1}{2} e^{-\frac{i\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^6 = \frac{1}{2} \\ 6\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{-\frac{1}{6}} \\ \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$V(x) = 2 \left(x - 2^{-\frac{1}{6}} e^{-\frac{i\pi}{12}}\right) \left(x - 2^{-\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \left(x - 2^{-\frac{1}{6}} e^{\frac{7i\pi}{12}}\right) \left(x - 2^{-\frac{1}{6}} e^{\frac{11i\pi}{12}}\right) \left(x - 2^{-\frac{1}{6}} e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) \left(x - 2^{-\frac{1}{6}} e^{-\frac{5i\pi}{12}}\right).$$

Exercice 12 : Un résultat hors-programme.

Soit P un polynôme à coefficients réels.

Soit z une racine complexe de P de multiplicité $m \in \mathbf{N}^*$.

On sait alors que : $P(z) = P'(z) = \dots = P^{(m-1)}(z) = 0$ et $P^{(m)}(z) \neq 0$.

Par ailleurs, $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ et de même :

$$\overline{P'(z)} = P'(\bar{z}), \quad \overline{P''(z)} = P''(\bar{z}), \dots, \overline{P^{(m)}(z)} = P^{(m)}(\bar{z}).$$

En effet, les polynômes $P', P'', \dots, P^{(m)}$ sont tous à coefficients réels.

Ainsi, $P(\bar{z}) = P'(\bar{z}) = \dots = P^{(m-1)}(\bar{z}) = \bar{0} = 0$ et $P^{(m)}(\bar{z}) \neq 0$.

Cela prouve que $\boxed{\bar{z} \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m.}$

Exercice 13 :

1. On pose $R = P - Q$. Alors $\deg(R) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ donc $\deg(R) \leq n$.

Par hypothèse, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, R(i) = 0$.

Si R est non nul, alors R admet au plus n racines réelles car $\deg(R) \leq n$.

Or on a trouvé $(n+1)$ racines pour R . Ainsi $R = 0$ donc $\boxed{P = Q.}$

2. $\forall x \in [0, 1], \exists t \in [0, \frac{\pi}{2}], x = \sin(t)$ car sinus est une surjection de $[0, \pi]$ dans $[0, 1]$.

L'hypothèse implique donc : $\forall x \in [0, 1], P(x) = 0$.

P possède donc une infinité de racines : $\boxed{P \text{ est le polynôme nul.}}$

Exercice 14 :

1. $\forall n \in \mathbf{Z}, Q(nT) = P(nT) - P(0) = P(0) - P(0) = 0$ car P est périodique de période T .

Ainsi, Q possède une infinité de racines : c'est le polynôme nul.

2. On a donc montré : $\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = P(0)$: le polynôme P est constant.

$\boxed{\text{Les seuls polynômes périodiques sont les polynômes constants.}}$

Exercice 15 :

On pose $R = P - Q$. L'hypothèse donne : $R(0) = R'(0) = R''(0) = R^{(3)}(0) = 0$.

0 est donc une racine au moins quadruple de R : $\exists S \in \mathbf{R}[X], R = X^4 S$.

Or le polynôme R est de degré inférieur ou égal à 3, donc $S = 0$. Ainsi, $\boxed{P = Q.}$

Exercice 16 : Polynômes d'interpolation de Lagrange.

1. Cas $n = 2$: On a trois réels x_0, x_1, x_2 , distincts deux-à-deux.

$$L_0 = \left(\frac{X - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{X - x_2}{x_0 - x_2} \right), \quad L_1 = \left(\frac{X - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{X - x_2}{x_1 - x_2} \right), \quad L_2 = \left(\frac{X - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{X - x_1}{x_2 - x_1} \right)$$

2. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors L_i est de degré n et l'ensemble de ses racines est $\{x_0, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}$.

Enfin, $L_i(x_i) = 1$.

3. Notons S le polynôme $S = \sum_{j=0}^n L_j - 1$.

Tous les L_j sont de degré n , donc leur somme est de degré au maximum n . Ainsi $\deg(S) \leq n$.

D'autre part, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, S(x_i) = \sum_{j=0}^n L_j(x_i) - 1$.

Mais pour tout $j \neq i, L_j(x_i) = 0$ et $L_i(x_i) = 1$ donc il vient : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, S(x_i) = 1 - 1 = 0$.

Le polynôme S possède donc au moins $(n+1)$ racines, mais il est de degré $\leq n$.

Il est donc nul, et on conclut : $\boxed{\sum_{j=0}^n L_j = 1.}$

4. Soit P un polynôme de degré au maximum n . Montrons que P est combinaison linéaire des L_i .

Notons T le polynôme : $T = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i - P$.

Ce polynôme est de degré au maximum n , en tant que somme de polynômes de degrés $\leq n$.

On évalue le polynôme T en chacun des x_j : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, T(x_j) = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i(x_j) - P(x_j)$.

Mais pour $i \neq j$, on a vu que $L_i(x_j) = 0$, et de plus $L_j(x_j) = 1$.

Il vient donc : $T(x_j) = P(x_j) \times 1 - P(x_j) = 0$.

Ainsi, T possède au moins $(n + 1)$ racines distinctes. Vu son degré, c'est le polynôme nul.

Conclusion :
$$P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i.$$

Remarque : Étant donnés $(n + 1)$ réels distincts $x_0, \dots, x_n$ et $(n + 1)$ réels quelconques $y_0, \dots, y_n$, alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n qui vérifie : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$.

C'est le polynôme : $P = \sum_{i=0}^n y_i L_i$.

Graphiquement, si on considère $(n + 1)$ points du plan, d'abscisses deux-à-deux distinctes, alors il existe une unique fonction polynomiale f de degré $\leq n$ dont la courbe représentative passe par chacun des $(n + 1)$ points. On dit que cette courbe "interpole" les points.