Exercice 1 : Reconnaître des applications linéaires

• $\forall u=(x,y,z,t), v=(x',y',z',t')\in\mathbf{R}^4,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, on a :
$f_1(\lambda u+\mu v)=(\lambda y+\mu y',\ \lambda y+\mu y')=\lambda(y,y)+\mu(y',y')=\lambda f_1(u)+\mu f_1(v)$ donc $\boxed{f_1\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^2).}$

• $f_2(0,0,0)=(2,1,-2)\neq(0,0,0)$ donc $\boxed{f_2\notin\mathcal{L}(\mathbf{R}^3).}$
Rappel : l'image du vecteur nul par toute application linéaire est le vecteur nul.

• $\forall u=(x,y,z,t), v=(x',y',z',t')\in\mathbf{R}^4, \forall\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}f_3(\lambda u+\mu v)&=\big(\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'-(\lambda t+\mu t')\,,\ \lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z'+\lambda t+\mu t'\,,\\&\qquad\lambda y+\mu y'-(\lambda z+\mu z')+\lambda t+\mu t'\,,\ \lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'-(\lambda z+\mu z')+\lambda t+\mu t'\big)\\&=\lambda(x+y-t,x+y+z+t,y-z+t,x+y-z+t)\\&\quad+\mu(x'+y'-t',x'+y'+z'+t',y'-z'+t',x'+y'-z'+t')\\&=\lambda f(u)+\mu f(v).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f_3\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^4).}$

On retiendra :

$\boxed{\text{Si les coordonnées de } f(u) \text{ sont linéaires par rapport aux coordonnées de } u, \text{ alors } f \text{ est une application linéaire.}}$

... et on n'écrira plus de preuve comme ci-dessus !

• $\boxed{f_4\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^4),\ f_6\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3) \text{ et } f_7\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3)}$ vu ce qui précède.

• $f_5(1,0)=(1,0),\ f_5(0,1)=(1,0)$ et $f_5(1,1)=(2,1)$.
On a donc : $f_5(1,0)+f_5(0,1)\neq f_5\big((1,0)+(0,1)\big)$. Ainsi, $\boxed{f_5\notin\mathcal{L}(\mathbf{R}^2).}$

Exercice 2 : Composée d'applications linéaires

• $\underline{f_1\circ f_3\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^2)}$ en tant que composée d'applications linéaires.

$\forall u=(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4$, on a : $f_1\circ f_3(u)=f_1(x+y-t,x+y+z+t,y-z+t,x+y-z+t)$
$=(x+y+z+t,x+y+z+t)$.

• $\underline{f_4\circ f_6\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^4)}$

$\forall u=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ f_4\circ f_6(u)=f_4(x+2y,y,x+z)$, donc

$$\begin{aligned}f_4\circ f_6(u)&=\big(3(x+2y)+y+3(x+z)\,,\ x+2y+2y-4(x+z)\,,\ y-3(x+z)\,,\ 2(x+2y)-y+7(x+z)\big).\\&=\big(6x+7y+3z\,,\ -3x+4y-4z\,,\ -3x+y-3z\,,\ 9x+3y+7z\big).\end{aligned}$$

Autre présentation : relativement aux bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$, on a :

$$M_6=\mathrm{Mat}(f_6)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad M_4=\mathrm{Mat}(f_4)=\begin{pmatrix}3&1&3\\1&2&-4\\0&1&-3\\2&-1&7\end{pmatrix},$$

donc on obtient la matrice associée à $f_4\circ f_6$ en effectuant le produit matriciel :

$$M_4.M_6=\begin{pmatrix}6&7&3\\-3&4&-4\\-3&1&-3\\9&3&7\end{pmatrix},\quad\text{d'où le résultat.}$$

Exercice 3 : Étude de chaque application linéaire

• $f_1(x,y,z,t)=(y,y)$

$*$ $\underline{\mathrm{Ker}\, f_1}$: $u=(x,y,z,t)\in\mathrm{Ker}\, f_1\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\y=0\end{cases}$ donc $\mathrm{Ker}\, f_1=\big\{(x,0,z,t)\in\mathbf{R}^4, x,z,t\in\mathbf{R}\big\}$
$=\{x(1,0,0,0)+z(0,0,1,0)+t(0,0,0,1),x,y,z\in\mathbf{R}\}$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}\, f_1=\mathrm{Vect}\big((1,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\big)\text{ et }\dim\mathrm{Ker}\, f_1=3.}$

$*$ $\underline{\text{Théorème du rang}}$: $3+\mathrm{rg}(f_1)=4$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(f_1)=1}$

$*$ $\underline{\mathrm{Im}\, f_1}$: $f_1(0,1,0,0)=(1,1)$ et $\mathrm{rg}(f_1)=1$ donc $\boxed{\mathrm{Im}\, f_1=\mathrm{Vect}(1,1).}$

$*$ $\mathrm{Ker}\, f_1\neq\{0_{\mathbf{R}^4}\}$ et $\mathrm{Im}\, f_1\neq\mathbf{R}^2$ donc $\boxed{f_1 \text{ n'est ni injective, ni surjective.}}$

• $f_3(x,y,z,t)=(x+y-t,x+y+z+t,y-z+t,x+y-z+t)$

$*$ $\underline{\mathrm{Ker}\, f_3}$: $u=(x,y,z,t)\in\mathrm{Ker}\, f_3\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-t=0\\x+y+z+t=0\\y-z+t=0\\x+y-z+t=0\end{cases}$ On peut résoudre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

On a 4 pivots ($\mathrm{rg}(f_3) = 4$) donc le système est de Cramer. Étant homogène, il possède une unique solution : $(0,0,0,0)$. Conclusion : $\boxed{\text{Ker}\, f_3 = \{0_{\mathbf{R}^4}\} \text{ et } f_3 \text{ est injective.}}$

$*$ Puisque f_3 est un endomorphisme de $\mathbf{R}^4$, alors f_3 injectif implique f_3 bijectif.

Ainsi : $\boxed{\mathrm{rg}(f_3) = 4 \text{ et } \mathrm{Im}\, f_3 = \mathbf{R}^4.}$

$*$ Bijection réciproque : on détermine l'inverse de $M_3 = \mathrm{Mat}(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve après calculs : $M_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & -3/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\forall (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ f_3^{-1}(x,y,z,t) = \big(-z+t, \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}y + z - \tfrac{3}{4}t, \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}t, -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}t\big).}$

- $f_4(x,y,z) = (3x+y+3z, x+2y-4z, y-3z, 2x-y+7z)$

$*$ Ker f_4 : $u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, f_4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+3z = 0 \\ x+2y-4z = 0 \\ y-3z = 0 \\ 2x-y+7z = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 15 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3z \\ x = -2y+4z = -2z \end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}\, f_4 = \big\{(-2z, 3z, z) \in \mathbf{R}^3, z \in \mathbf{R}\big\} = \{z(-2,3,1), z \in \mathbf{R}\}$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}\, f_4 = \mathrm{Vect}(-2,3,1) \text{ et } \dim \mathrm{Ker}\, f_4 = 1.}$

$*$ Im f_4 : On a trouvé un système de rang 2, donc $\boxed{\mathrm{rg}(f_4) = 2.}$

$f_4(1,0,0) = (3,1,0,2)$ et $f_4(0,1,0) = (1,2,1,-1)$.

Ces deux vecteurs appartiennent à Im f_4 et sont non colinéaires. De plus, $\dim(\mathrm{Im}\, f_4) = 2$.

Ils constituent donc une base de Im f_4 : $\boxed{\mathrm{Im}\, f_4 = \mathrm{Vect}\big((3,1,0,2),(1,2,1,-1)\big).}$

$*$ $\mathrm{Ker}\, f_4 \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ et $\mathrm{Im}\, f_4 \neq \mathbf{R}^4$ donc $\boxed{f_4 \text{ n'est ni injective, ni surjective.}}$

- $f_6(x,y,z) = (x+2y, y, x+z)$

$*$ Ker f_6 : $u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, f_6 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ y = 0 \\ x+z = 0 \end{cases}$ On résout facilement : $\boxed{\mathrm{Ker}\, f_6 = \{(0,0,0)\}.}$

$*$ Im f_6 : $\mathrm{Ker}\, f_6 = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ et f_6 est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ donc $\boxed{f_6 \text{ est bijective et } \mathrm{Im}\, f_6 = \mathbf{R}^3.}$

$*$ Bijection réciproque : comme pour f_3, on peut chercher l'inverse de la matrice associée à f_6.

Peut-être plus rapide ici : $\begin{cases} x+2y = a \\ y = b \\ x+z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a-2b \\ y = b \\ z = -a+2b+c \end{cases}$

donc $\boxed{\forall (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ f_6^{-1}(a,b,c) = \big(a-2b, b, -a+2b+c\big).}$

- $f_7(x,y) = (x, y, x+y)$

$*$ Ker f_7 : $u = (x,y) \in \mathrm{Ker}\, f_7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x+y = 0 \end{cases}$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}\, f_7 = \{0_{\mathbf{R}^2}\}, \text{ et } f_7 \text{ est injective.}}$

$*$ Théorème du rang : $0 + \mathrm{rg}(f_7) = 2$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(f_7) = 2}$

$*$ Im f_7 : $f_7(1,0) = (1,0,1)$, $f_7(0,1) = (0,1,1)$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires dans Im f_7, de dimension 2, donc ils forment une base de Im f_7 : $\boxed{\mathrm{Im}\, f_7 = \mathrm{Vect}\big((1,0,1),(0,1,1)\big).}$

$\mathrm{Im}\, f_7 \neq \mathbf{R}^3$ donc $\boxed{f_7 \text{ n'est pas surjective.}}$

Exercice 4 : Étude d'un projecteur et d'une symétrie

1) <u>$f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ de matrice relativement à une base $\mathcal{B}$</u> : $M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

$*$ Pour montrer que $f \circ f = f$, il suffit de calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f) = M^2$.
On trouve $M^2 = M$, donc $\boxed{f \circ f = f.}$

$*$ Noyau de f : soit $u \in \mathbf{R}^3$, de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$: $u = xi + yj + zk$.
Alors $f(u) = (-2x + 4y + 2z)i + (-4x + 8y + 4z)j + (5x - 10y - 5z)k$.

on résout $f(u) = 0_{\mathbf{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y + 2z = 0 \\ -4x + 8y + 4z = 0 \\ 5x - 10y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}\, f = \big\{(2y + z)i + yj + zk \in \mathbf{R}^3, y, z \in \mathbf{R}\big\} = \{y(2i + j) + z(i + k),\ y, z \in \mathbf{R}\}$.
Ces deux vecteurs étant non colinéaires, on en déduit : $\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\big((2i + j), (i + k)\big).}$

$*$ Image de f : d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbf{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 2 = 1$,
donc $\mathrm{Im}\, f$ est une droite vectorielle. On calcule $f(i) = -2i - 4j + 5k$.
Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(-2i - 4j + 5k).}$

Aspect géométrique : dans la base (i, j, k) de l'espace, l'application f est donc une projection sur la droite de vecteur-directeur $-2i - 4j + 5k$. Ce n'est pas nécessairement **la** projection orthogonale...

2) <u>$g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ de matrice relativement à une base $\mathcal{B}$</u> : $N = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

$*$ On calcule $N^2 = I_3$ donc $\boxed{g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}.}$
$*$ Noyau et image de g : la relation précédente montre que g est bijective, de bijection réciproque $g^{-1} = g$.
Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}\, g = \{0_{\mathbf{R}^3}\} \text{ et } \mathrm{Im}\, g = \mathbf{R}^3.}$

Exercice 5 : Réduction d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$

1) <u>Matrice canoniquement associée</u> : $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

2) <u>Deux s-ev</u> : $N = \mathrm{Ker}\, f$ par définition, donc N est un s-ev de $\mathbf{R}^3$.

On résout sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}z \\ x = \frac{3}{4}z \end{cases}$ donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\big(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1\big) = \mathrm{Vect}(3, 2, 4)$.

Une base de N est donc : $\boxed{\mathcal{B}_N = (3, 2, 4).}$

$I = \big\{u \in \mathbf{R}^3,\ f(u) = u\big\} = \big\{u \in \mathbf{R}^3,\ f(u) - u = 0\big\} = \big\{u \in \mathbf{R}^3,\ g(u) = 0\big\}$, en posant $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$.
$g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ par opérations, donc $\boxed{I = \mathrm{Ker}\, g \text{ est un s-ev de } \mathbf{R}^3}$.

On a : $u = (x, y, z) \in I \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 3y + 3z = x \\ -2x - y + 2z = y \\ -4x - 4y + 5z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3y + 3z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ -4x - 4y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = x + y.$

Donc $I = \big\{(x, y, x + y) \in \mathbf{R}^3,\ x, y \in \mathbf{R}\big\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1),\ x, y \in \mathbf{R}\}$.
Ces deux vecteurs engendrent I : $\boxed{I = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 1), (0, 1, 1)\big)}$ et ne sont pas colinéaires

donc (par exemple) : $\boxed{\mathcal{B}_I = \big((1, 0, 1), (0, 1, 1)\big).}$

3) <u>$\mathcal{B}_N \cup \mathcal{B}_I$ est une base de $\mathbf{R}^3$</u>
Il suffit de montrer que la matrice associée à la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_N \cup \mathcal{B}_I$ est inversible. On la note P :

$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \boxed{1} \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 0 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On trouve 3 pivots, donc P est inversible et $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$

4) Matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Par définition, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ se trouve en écrivant en colonnes les images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
On sait que $(3,2,4) \in \operatorname{Ker} f$, donc $f(3,2,4) = 0_{\mathbf{R}^3}$.
On sait aussi que $(1,0,1)$ et $(0,1,1) \in I$, donc $f(1,0,1) = (1,0,1)$ et $f(0,1,1) = (0,1,1)$.

On obtient donc : $\boxed{A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$

Remarque 1 :
changer l'ordre des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ revient à changer l'ordre des colonnes et des lignes de A'.

Remarque 2 :
on peut trouver A' avec la formule de changement de bases pour un endomorphisme : $A' = P^{-1}AP$.
La matrice P (donnée ci-dessus) est en effet la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

Remarque 3 : On remarque que A' est beaucoup plus simple que A. En particulier, A' est diagonale, ce qui permet immédiatement d'en calculer les puissances successives. On pourra revoir (TD11 Matrices, exercice 4 question 2) comment obtenir alors les puissances successives de A connaissant celles de A'.

Remarque 4 :
La base $\mathcal{B}$ vers laquelle l'exercice vous guide est une base dite 'adaptée' à l'endomorphisme f.
Vous verrez l'année prochaine comment trouver une base adaptée, sans aucune indication (on appelle cette recherche la *Réduction des endomorphismes*).

Exercice 6 : Changement de bases

1) Bases de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$: On trouve $\operatorname{Ker} f$ en résolvant $f(u) = 0$ pour un vecteur $u = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $u = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \end{cases}$, soit : $\boxed{\operatorname{Ker} f = \big\{(-z,-z,z) \in \mathbf{R}^3,\ z \in \mathbf{R}\big\} = \text{Vect}(-1,-1,1).}$

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(f) = \dim(\mathbf{R}^3) - \dim(\operatorname{Ker} f) = 3 - 1 = 2$.
Pour trouver une base de $\operatorname{Im} f$, il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires dans $\operatorname{Im} f$.
$f(e_1) = (1,2,0)$ et $f(e_2) = (-2,0,1)$ sont non colinéaires, donc $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Im} f \text{ est } \big((1,2,0),(-2,0,1)\big).}$

2) Expression de f dans une nouvelle base :

Avec les notations de l'énoncé : $\operatorname{Ker} f = \text{Vect}(u)$ et $\operatorname{Im} f = \text{Vect}(v,w)$.
La matrice de la famille (u,v,w) dans la base canonique est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
On cherche à savoir si P est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

On trouve 3 pivots, donc P est inversible et $\boxed{\mathcal{B} = (u,v,w) \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ (I_3) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Ainsi, $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On trouve alors $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP$ d'après la formule de changement de bases.

Après calculs : $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.}$

Exercice 7 : Un endomorphisme nilpotent

1) $u \circ u$ est l'endomophisme nul

Dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$, on a : $A = \text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Un calcul rapide montre que $A^2 = 0_2$ donc $\boxed{u \circ u = 0.}$

2) Noyau et image de u

$(x, y) \in \text{Ker}\, u \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$ donc $\boxed{\text{Ker}\, u = \text{Vect}(2, 1).}$

Le théorème du rang montre alors que $\text{Im}\, u$ est de dimension 1.

$u(1, 0) = (2, 1)$ en constitue donc une base : $\boxed{\text{Im}\, u = \text{Vect}(2, 1).}$

On constate que $\text{Im}\, u = \text{Ker}\, u$.

En effet, puisque $u \circ u = 0$, alors $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ u\big(u(x, y)\big) = (0, 0)$ donc $u(x, y) \in \text{Ker}\, u$.

Ceci montre que $\text{Im}\, u \subset \text{Ker}\, u$.

Puisque $u \neq 0$, alors $\text{rg}(u) \geqslant 1$ et $\dim(\text{Ker}\, u) < \dim(\mathbf{R}^2) = 2$.

Mais l'inclusion précédente impose : $\text{rg}(u) \leqslant \dim(\text{Ker}\, u)$ donc on a : $\text{rg}(u) = \dim(\text{Ker}\, u) = 1$.

Et cette égalité des dimensions prouve alors que $\boxed{\text{Im}\, u = \text{Ker}\, u.}$

3) Une base $\mathcal{B} = (a, b)$ de $\mathbf{R}^2$

Il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B} = (a, b)$ est libre, c'est-à-dire a et b non colinéaires.

Si a, b étaient colinéaires, alors il existerait $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $a = \lambda b$.

On aurait alors $u(a) = u(\lambda b) = \lambda u(b)$. Mais puisque $b = u(a)$, alors $b \in \text{Im}\, u = \text{Ker}\, u$ donc $u(b) = 0$.

On aurait donc : $u(a) = \lambda.0 = 0$, ce qui est une contradiction.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{B} = (a, b) \text{ est une base } \mathbf{R}^2.}$

4) Matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$

On a $u(a) = b$ et $u(b) = u \circ u(a) = 0$ donc : $\boxed{A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

Exercice 8 : Endomorphisme nilpotent (2)

1) Noyau et image de f

$u = xu_1 + yu_2 + zu_3 \in \text{Ker}\, f \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 6z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y - 2z$ donc $\text{Ker}\, f = \big\{(y - 2z)u_1 + yu_2 + zu_3 \in \mathbf{R}^3,\ y, z \in \mathbf{R}\big\}$

On trouve donc : $\boxed{\text{Ker}\, f = \text{Vect}\big(u_1 + u_2, -2u_1 + u_3\big) = \text{Vect}(v_1, v_2).}$

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(f) = 3 - 2 = 1$. On a $f(u_1) = 3u_1 + u_2 - u_3 \neq 0$

donc $\boxed{\text{Im}\, f = \text{Vect}(3u_1 + u_2 - u_3) = \text{Vect}(v_3).}$

2) L'image est incluse dans le noyau

On peut remarquer que $v_3 = v_1 - v_2$ donc $\text{Vect}(v_3) \subset \text{Vect}(v_1, v_2)$, donc $\boxed{\text{Im}\, f \subset \text{Ker}\, f.}$

On peut aussi calculer M^2 et on trouve la matrice nulle. Ainsi, $f \circ f = 0$.

Comme à l'exercice précédent, cela prouve que $\text{Im}\, f \subset \text{Ker}\, f$.

Remarque : on n'a cependant pas l'égalité ici, n'étant plus dans $\mathbf{R}^2$.

Exercice 9 : Une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$

1) Matrice de f dans les bases canoniques $\boxed{M = \text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

où $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_2$ désignent les bases canoniques respectivement de $\mathbf{R}^3$ et de $\mathbf{R}^2$.

2) Expression de f dans de nouvelles bases

On étudie $P = \text{Mat}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: elle est inversible donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbf{R}^3}$.

On étudie $Q = \text{Mat}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: elle est inversible donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbf{R}^2}$.

Relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a : $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = Q^{-1}MP$.

On peut calculer, avec $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $\boxed{M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

Signification : $f(u_1) = 0$ ($1^{\text{ère}}$ colonne), $f(u_2) = 3v_1$ ($2^{\text{ème}}$ colonne) et $f(u_3) = v_1 + v_2$ ($3^{\text{ème}}$ colonne), ce qu'on peut vérifier : $f(1,0,1) = (0,0)$, $f(1,1,0) = (3,0) = 3(1,0) = 3v_1$ et $f(1,1,1) = (2,1) = v_1 + v_2$.

Exercice 10 : Un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

1) $\underline{\mathcal{B}' = (u,v,w) \text{ est une base de } \mathbf{R}^3}$

Nommons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons si P est inversible :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

donc P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Ceci montre que $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$

2) $\underline{\text{Changement de bases}}$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, après calculs.

3) $\underline{\text{Matrice de la composée } n^{\text{ème}}\ f^n}$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n) = (A')^n$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n) = \mathrm{Diag}(1, 1, (-1)^n).}$

4) $\underline{\text{Retour à la base } \mathcal{B}}$

On obtient $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = P\,(A')^n\,P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(1,1,(-1)^n)P^{-1}$.

Après calculs : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+(-1)^n) & \frac{1}{2}(-1+(-1)^n) & 0 \\ \frac{1}{2}(-1+(-1)^n) & \frac{1}{2}(1+(-1)^n) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

Remarque : Pour $n = 0$, on doit trouver I_3, et pour $n = 1$, on doit retrouver la matrice A.

Exercice 11 : Un endomorphisme de $\mathbf{R}^4$.

1) $\underline{f \text{ est bijectif}}$: $A = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{-1} & 1 & -3 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de rang 4, donc inversible.

2) $\underline{\text{Ensemble des vecteurs invariants par } f}$:

$F = \{u \in \mathbf{R}^4,\ f(u) = u\}$ est le noyau de l'endomarphisme $f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^4}$, c'est donc un s-ev de $\mathbf{R}^4$.

$$u = xb_1 + yb_2 + zb_3 + tb_4 \in F \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z - 3t = x \\ x + z - 3t = y \\ z - 2t = z \\ -t = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + z \\ t = 0 \end{cases}$$

donc $F = \{xb_1 + (x+z)b_2 + zb_3 \in \mathbf{R}^4,\ x, z \in \mathbf{R}\} = \{x(b_1 + b_2) + z(b_2 + b_3),\ x, z \in \mathbf{R}\}$

On pose $u_1 = b_1 + b_2$ et $u_2 = b_2 + b_3$. On vient d'écrire : $\boxed{F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).}$

Puisque u_1, u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une base de F, donc $\boxed{\dim(F) = 2.}$

3) $\underline{G = \{u \in \mathbf{R}^4,\ f(u) = -u\}}$

G est le noyau de l'endomorphisme $f + \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^4}$ donc c'est un s-ev de $\mathbf{R}^4$.

$$u = xb_1 + yb_2 + zb_3 + tb_4 \in G \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z - 3t = -x \\ x + z - 3t = -y \\ z - 2t = -z \\ -t = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2t \\ x + y = 2t \\ z = t \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

On pose $v = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ et on a : $u \in G \Leftrightarrow u = tv,\ t \in \mathbf{R}$ donc $\boxed{G = \mathrm{Vect}(v) \text{ et } \dim(G) = 1.}$

4) Une nouvelle base de $\mathbf{R}^4$, adaptée à f

On pose $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, v, b_1)$. La matrice de la famille $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}$ est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$

C'est une matrice carrée de rang 4, donc inversible : $\boxed{\mathcal{B}_1 \text{ est une base de } \mathbf{R}^4.}$

5) Matrice de f dans $\mathcal{B}_1$

$u_1, u_2 \in F$ donc $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$.
$v \in G$ donc $f(v) = -v$.
Reste à calculer $f(b_1) = 2b_1 + b_2$, et à l'exprimer en fonction de u_1, u_2, v, b_1.
On peut remarquer que $u_1 + b_1 = 2b_1 + b_2 = f(b_1)$.
Si on ne le voit pas, on résout un système : $2b_1 + b_2 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma v + \delta b_1$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

6) Matrice de la bijection réciproque f^{-1} : il s'agit d'inverser la matrice A_1, et on trouve :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f^{-1}) = (A_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$