DS n°8, mathématique

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.Durée :3h30

Exercice 1 : Algèbre linéaire

Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à M.
Id désigne l'application identité de $\mathbf{R}^3$, et $0_{\mathbf{R}^3}$ désigne le vecteur nul $(0,0,0)$ de $\mathbf{R}^3$.
On pose H la partie de $\mathbf{R}^3$ définie par : $H = \{u \in \mathbf{R}^3 \mid f(u) = u\}$.
On pose enfin K la partie de $\mathbf{R}^3$ définie par : $K = \{(2\lambda - \mu,\ \lambda + \mu,\ \mu) \in \mathbf{R}^3,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$.

Partie I

1. Expliquer pourquoi : $H = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. En déduire que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
2. Montrer qu'un vecteur (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ appartient à H si et seulement si : $x - z = 0$.
3. Déterminer une base de H. Quelle est sa dimension ?
4. En déduire le rang de l'endomorphisme $f - \mathrm{Id}$, et une base de son image.
5. Montrer que : $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset H$.
6. Montrer que : $\forall u \in \mathbf{R}^3,\ f \circ f(u) - 2f(u) + u = 0_{\mathbf{R}^3}$.
7. En déduire que f est bijective, et exprimer sa bijection réciproque f^{-1} en fonction de f et Id.

Partie II

8. Montrer que K est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. En donner une base, et préciser sa dimension.
9. Déterminer une équation cartésienne de K.
10. Montrer que $H \cap K$ est une droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$, engendrée par un vecteur à préciser.

Partie III

On cherche à exprimer l'endomorphisme f plus simplement.
On pose : $a = (0,1,0),\ b = (1,2,1),\ c = (2,1,3)$. Soit $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B} = (a, b, c)$.

11. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
12. Exprimer $f(a), f(b)$ puis $f(c)$ en fonction de a, b, c.
13. En déduire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathcal{B}$.

Partie IV

On admet que pour tout $u \in \mathbf{R}^3$, il existe un unique réel λ_u tel que : $f(u) - u = \lambda_u\, b$.
On pose φ l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $\forall u \in \mathbf{R}^3,\ \varphi(u) = \lambda_u$.

14. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$.
15. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$.

Exercice 2 : Factorisation d'un polynôme

On définit le polynôme P par son expression : $P(x) = -x^5 + x^4 + 13x^3 - 25x^2 + 12x$.

1. Quel facteur commun apparaît dans l'expression de $P(x)$?
2. Étudier la multiplicité de 1 en tant que racine de P.
3. En déduire la factorisation complète dans $\mathbf{R}[X]$ de P.
4. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \ln(P(x))$?

Exercice 3 : Polynômes

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.
Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que :

$$(1) \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(k) = \frac{1}{k+1}$$

puis de calculer $P(n+1)$.

1. **Une question d'informatique :**
   Écrire en *Python* une fonction `valeursEnK` prenant pour arguments une fonction `f` et un entier `n`, et renvoyant une liste formée par les valeurs $\{f(k),\ k \in [\![0,n]\!]\}$.
   Par exemple : `>>> valeursEnK(exp, 5)` *devra renvoyer la liste :* $\left[e^0, e^1, e^2, e^3, e^4, e^5\right]$.
2. **Cas où $n = 1$:**
   Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 1 tel que :
   $$P(0) = 1 \text{ et } P(1) = \frac{1}{2}.$$
   Calculer alors $P(2)$.
3. **Cas où $n = 2$:**
   Résoudre le même problème dans le cas où $n = 2$.
4. **Cas général :**
   On veut montrer qu'il existe au plus un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ vérifiant la relation (1).
   On suppose qu'il en existe deux : P et R. On pose alors $S = P - R$.
   Quelles racines connaît-on pour le polynôme S ? Quel est au maximum son degré ?
   Conclure.
5. Dans cette question, on suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ vérifiant (1), et on pose :
   $$\forall x \in \mathbf{R},\ Q(x) = (x+1)P(x) - 1$$
   (a) Exprimer le degré de Q en fonction du degré de P.
   (b) Montrer que tout entier $k \in [\![0,n]\!]$ est une racine de Q.
   (c) En déduire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbf{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ Q(x) = \lambda \prod_{k=0}^{n}(x-k)$.
   (d) Calculer $Q(-1)$ et en déduire que : $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$
6. Dans cette question, on pose : $\forall x \in \mathbf{R},\ Q(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n}(x-k)$.
   (a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbf{R},\ Q(x) + 1 = (x+1)P(x)$.
   (b) Conclure.
7. En déduire une expression simplifiée de $P(n+1)$ en fonction de n.

Exercice 4 : Étude de suites définies par une somme

Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$ et $T_n = \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

On cherche à déterminer le comportement asymptotique des suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3, puis classer ces valeurs par ordre croissant.
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
3. Étudier la monotonie de la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$.
4. Montrer que les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   Que peut-on en déduire ?
5. Soit $k \in [\![n, 2n-1]\!]$. Montrer que : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.
6. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$, puis que : $S_n \leqslant \ln(2) \leqslant T_n - \dfrac{1}{2n}$.
7. Conclure.