

Exercice 1 : Algèbre linéaire

1. Par définition, $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \{u \in \mathbf{R}^3 \mid (f - \text{Id})(u) = 0_{\mathbf{R}^3}\}$.

Mais $(f - \text{Id})(u) = 0_{\mathbf{R}^3} \Leftrightarrow f(u) = u$, donc $\text{Ker}(f - \text{Id}) = H$.

En tant que noyau de l'application linéaire $f - \text{Id}$, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in H \Leftrightarrow f(x, y, z) = (x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ -2x + y + 2z = y \\ -x + 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Une équation cartésienne de H est donc $H : x - z = 0$.

3. D'après la question précédente, $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - z = 0\} = \{(z, y, z) \in \mathbf{R}^3, (y, z) \in \mathbf{R}^2\}$
donc $H = \{z(1, 0, 1) + y(0, 1, 0), (y, z) \in \mathbf{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$

Les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 0)$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de H .

Cette base est de cardinal 2, donc $\dim(H) = 2$.

4. D'après la formule du rang : $\dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) + \text{rg}(f - \text{Id}) = \dim(\mathbf{R}^3)$, soit : $\dim(H) + \text{rg}(f - \text{Id}) = 3$.

Puisque $\dim(H) = 2$, on en déduit que $\text{rg}(f - \text{Id}) = 1$.

On calcule : $(f - \text{Id})(1, 0, 0) = f(1, 0, 0) - (1, 0, 0) = (0, -2, -1) - (1, 0, 0) = (-1, -2, -1)$.

$\text{Im}(f - \text{Id})$ est la droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$ engendrée par $(1, 2, 1)$.

5. $(1, 2, 1) \in H$ car il vérifie son équation cartésienne $x - z = 0$. Par suite, $\text{Vect}(1, 2, 1) = \text{Im}(f - \text{Id}) \subset H$.

6. Par définition, H est l'ensemble des vecteurs invariants par f .

Or, $\forall u \in \mathbf{R}^3$, $f(u) - u \in H$ donc : $f(f(u) - u) = f(u) - u$, ie : $\forall u \in \mathbf{R}^3$, $f \circ f(u) - 2f(u) + u = 0_{\mathbf{R}^3}$.

7. D'après la question précédente, $f^2 - 2f + \text{Id} = 0$, où 0 désigne l'application linéaire nulle de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$.
On en déduit que : $-f^2 + 2f = \text{Id}$, donc $f \circ (-f + 2\text{Id}) = \text{Id}$.

Ainsi, f est bijective, de bijection réciproque $f^{-1} = 2\text{Id} - f$.

8. Par définition, $K = \{\lambda(2, 1, 0) + \mu(-1, 1, 1), (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\} = \text{Vect}((2, 1, 0), (-1, 1, 1))$

K est donc un s-ev de $\mathbf{R}^3$. Les vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(-1, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires :

K est un s-ev de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$, de base $((2, 1, 0), (-1, 1, 1))$.

9. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. $u \in K \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $\begin{cases} x = 2\lambda - \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = y \\ -3\mu = x - 2y \\ \mu = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = y \\ \mu = z \\ 0 = x - 2y + 3z \end{cases}$

Ce système est compatible ssi son équation auxiliaire est vérifiée : $(x, y, z) \in K \Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0$.

10. Soit $(x, y, z) \in H \cap K$. Alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $\begin{cases} x = 2\lambda - \mu & (1) \\ y = \lambda + \mu & (2) \\ z = \mu = x & (3) \end{cases}$

(1) et (3) donnent : $x = z = \mu = \lambda$ et (2) donne $y = 2x$, donc $(x, y, z) = (x, 2x, x) = x(1, 2, 1)$.

$H \cap K$ est la droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$ engendrée par $b = (1, 2, 1)$.

11. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On a : $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Étudions le rang de } P : \text{rg}(P) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3$$

donc P est inversible, et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

12. $f(a) = f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $f(b) = f(1, 2, 1) = (1, 2, 1)$

et $f(c) = f(2, 1, 3) = (3, 3, 4) = (2, 1, 3) + (1, 2, 1)$ donc $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = b + c$.

13. On en déduit que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

14. On a montré (question 4) que : $\forall u \in \mathbf{R}^3, f(u) - u \in \text{Vect}(b)$ donc $\exists \lambda_u \in \mathbf{R}, f(u) - u = \lambda_u b$.

On définit $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ par : $\forall u \in \mathbf{R}^3, \varphi(u) = \lambda_u$, c'est-à-dire $\forall u \in \mathbf{R}^3, f(u) - u = \varphi(u)b$.

Soient $u, v \in \mathbf{R}^3$ et $k \in \mathbf{R}$.

On a : $f(u) - u = \varphi(u)b, f(v) - v = \varphi(v)b$ et $f(u+v) - (u+v) = \varphi(u+v)b$.

Mais f est linéaire donc $f(u+v) - (u+v) = (f(u) - u) + (f(v) - v) = (\varphi(u) + \varphi(v))b = \varphi(u+v)b$, donc $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ (b étant un vecteur non nul). De plus,

$f(ku) - ku = \varphi(ku)b = k(f(u) - u) = k\varphi(u)b$, donc $\varphi(ku) = k\varphi(u)$. Ainsi, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$.

Deuxième méthode :

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Alors $f(u) = (z, -2x + y + 2z, -x + 2z)$ donc $f(u) - u = (z - x, -2x + 2z, -x + z)$

$f(u) - u = (z - x)(1, 2, 1) = (z - x)b = \varphi(u)b$ en posant $\varphi(u) = z - x$.

Ainsi, $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \varphi(x, y, z) = z - x$.

$\varphi(x, y, z)$ est une combinaison linéaire de x, y, z donc φ est linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$.

15. Soit $u \in \mathbf{R}^3$. Alors $\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) - u = 0 \times b = 0_{\mathbf{R}^3} \Leftrightarrow u \in H$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = H$.

Exercice 2 : $P(x) = -x^5 + x^4 + 13x^3 - 25x^2 + 12x$

1. $P(x)$ se factorise par x : $\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = x(-x^4 + x^3 + 13x^2 - 25x + 12)$.

On pose pour la suite : $Q(x) = -x^4 + x^3 + 13x^2 - 25x + 12$.

2. La multiplicité de 1 en tant que racine de P est la même qu'en tant que racine de Q .

$Q(1) = -1 + 1 + 13 - 25 + 12 = 0$ donc 1 est racine de Q .

$Q'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 26x - 25$ donc $Q'(1) = -4 + 3 + 26 - 25 = 0$.

$Q''(x) = -12x^2 + 6x + 26$ donc $Q''(1) = -12 + 6 + 26 = 20 \neq 0$. 1 est racine double de P .

3. Q se factorise donc par $(x - 1)^2$: $Q(x) = (x - 1)^2 R(x)$, avec R un polynôme de degré 2.

On pose $R(x) = ax^2 + bx + c$. Par observation du coefficient dominant, on trouve que $a = -1$.

Par observation du coefficient constant, on trouve que $c = 12$.

Ainsi, $-x^4 + x^3 + 13x^2 - 25x + 12 = (x^2 - 2x + 1)(-x^2 + bx + 12)$.

En développant les monômes de degré 3, on obtient : $1 = b + 2$, donc $b = -1$.

Ainsi, $Q(x) = (x - 1)^2(-x^2 - x + 12)$. Le discriminant de R est $\Delta = (-1)^2 - 4(-1) \times 12 = 49 > 0$.

R possède donc 2 racines réelles : $\frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2(-1)} = 3$ et $\frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2(-1)} = -4$.

On a donc : $R(x) = -(x - 3)(x + 4)$. Conclusion : $P(x) = -x(x - 1)^2(x - 3)(x + 4)$.

4. $\ln(P(x))$ est défini pour x tel que $P(x) > 0$. On dresse donc le tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$	-4	0	1	3	$+\infty$	
$-x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi, $\ln \circ P$ est défini sur $] -\infty, -4[\cup]0, 1[\cup]1, 3[$.

Exercice 3 : Polynômes

1. Informatique :

```
def valeurEnK(f, n) :
    L = []
    for k in range(n+1) :
        L.append(f(k))
    return L
```

2. Cas $n = 1$:

(Analyse) Soit $P(x) = ax + b$ un polynôme de $\mathbf{R}_1[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = \frac{1}{2}$.

Alors : $\begin{cases} b = 1 \\ a + b = \frac{1}{2} \end{cases}$, donc $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$.

(Synthèse) On pose $P(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ et on vérifie que P convient. On calcule $P(2) = 0$.

3. Cas $n = 2$:

(Analyse) Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de $\mathbf{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = \frac{1}{2}$ et $P(2) = \frac{1}{3}$.

Alors : $\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = \frac{1}{2} \\ 4a + 2b + c = \frac{1}{3} \end{cases}$, donc $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{2}{3}$ et $c = 1$.

(Synthèse) On pose $P(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ et on vérifie que P convient. On calcule $P(3) = \frac{1}{2}$.

4. Unicité :

Supposons que $P, R \in \mathbf{R}_n[X]$ satisfassent tous les deux la relation (1).

Alors : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(k) = R(k) = \frac{1}{k+1}$.

On pose $S = P - R$. Il vient alors : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $S(k) = 0$.

Ainsi le polynôme S , de degré inférieur ou égal à n , possède au moins $(n+1)$ racines distinctes.

On en déduit que S est le polynôme nul, donc que : $P = R$.

5. (Analyse)

(a) Si P vérifie (1), alors P n'est pas le polynôme nul. On a donc : $\deg Q = \deg P + 1$.

(b) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a : $Q(k) = (k+1)P(k) - 1 = (k+1)\frac{1}{k+1} - 1 = 0$. Ainsi, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q(k) = 0$.

(c) $\deg P \leq n$ donc $\deg Q \leq n+1$. Mais Q possède au moins $(n+1)$ racines distinctes, donc

$\deg Q \geq n+1$. Ainsi, $\deg Q = n+1$, donc $Q = \lambda \prod_{k=0}^n (X - k)$, $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

(d) D'une part, $Q(-1) = (-1+1)P(-1) - 1 = -1$, d'autre part $Q(-1) = \lambda \prod_{k=0}^n (-1-k) = \lambda(-1)^{n+1}(n+1)!$

Ainsi, $\lambda = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$ et $Q(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - k)$.

6. (Synthèse)

(a) Posons $R(x) = Q(x) + 1$. Par calcul, on trouve $Q(-1) = -1$ donc $R(-1) = 0$.

-1 est alors une racine de R , qui se factorise donc par $(x+1)$:

$\exists P \in \mathbf{R}[X]$, $Q(x) + 1 = (x+1)P(x)$. $\deg Q = n+1$ donc $\deg P = n$: $P \in \mathbf{R}_n[X]$.

(b) Posons $P(x) = \frac{Q(x)+1}{x+1}$. Vu ce qui précède, P est un polynôme de degré n .

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a : $P(k) = \frac{Q(k)+1}{k+1}$. Mais pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q(k) = 0$, donc $P(k) = \frac{1}{k+1}$.

Le polynôme $P(x) = \frac{1}{x+1} \left(\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x-k) + 1 \right)$ est donc l'unique solution du problème.

$$7. P(n+1) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (n+1-k) + 1 \right) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n+1} i + 1 \right) \text{ en posant } i = n+1-k$$

$$P(n+1) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{(-1)^n (n+1)!}{(n+1)!} + 1 \right) = \frac{1 + (-1)^n}{n+2}.$$

Si n est impair, alors $P(n+1) = 0$; si n est pair, alors $P(n+1) = \frac{2}{n+2}$.

Exercice 4 : $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \rightarrow \ln 2$

1. $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{30}{60}$, $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{35}{60}$ et $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$. Ainsi : $S_1 < S_2 < S_3$.

2. Soit $n \geq 1$: $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$.

Ainsi, la suite $(S_n)_n$ est strictement croissante.

3. Soit $n \geq 1$: $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$.

Ainsi, la suite $(T_n)_n$ est strictement décroissante.

4. Soit $n \geq 1$. On a : $T_n - S_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim(T_n - S_n) = 0$.

$(S_n)_n$ croît, $(T_n)_n$ décroît, et leur différence converge vers 0 : (S_n) et (T_n) sont adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, (S_n) et (T_n) sont convergentes, vers la même limite ℓ .

5. Soit $k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket$. Alors pour tout $t \in [k, k+1]$, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$,

donc en intégrant sur le segment $[k, k+1]$, on obtient : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

6. On somme ces encadrements pour $k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket$: $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

D'après la relation de Chasles pour l'intégrale : $\sum_{k=n}^{2n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_n^{2n} \frac{dt}{t}$
 $= [\ln |t|]_n^{2n} = \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2)$.

Par glissement d'indices : $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = S_n$. Enfin, $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = T_n - \frac{1}{2n}$.

On obtient donc : $\forall n \geq 1, S_n \leq \ln(2) \leq T_n - \frac{1}{2n}$.

7. Par passage à la limite dans l'encadrement de la question (6), on obtient : $\ell \leq \ln(2) \leq \ell$
donc $\ell = \ln(2)$ et les suites $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ convergent toutes deux vers $\ln(2)$.