

Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur $\mathbf{R}$ ou une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles. Elles ne dépendent que d'une seule variable. Les dérivées successives d'une fonction y de la variable t sont notées : $y', y'', y^{(3)} \dots$ au lieu de $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3} \dots$

I Généralités

1 Equation fonctionnelle, équation différentielle

DÉFINITION

Une *équation fonctionnelle* est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple : $\forall t \in \mathbf{R}, y(t+1) = 2y(t)$ est une équation fonctionnelle où la fonction inconnue est notée y et sa variable réelle est notée t . Une solution de cette équation fonctionnelle est :

DÉFINITION

L'*ordre* de l'équation différentielle est le plus grand ordre de dérivée apparaissant.

Un grand nombre de problèmes physiques font apparaître des relations entre différentes grandeurs qui prennent la forme d'équations différentielles.

Exemple : dans un circuit électrique avec un condensateur chargé de capacité C en série avec une résistance R , la tension électrique u aux bornes du condensateur vérifie la relation : $\frac{du}{dt}(t) + \frac{1}{RC} u(t) = 0$.

Il s'agit d'une ED d'ordre 1 qu'on note : $y' + ay = 0$, avec $a = \frac{1}{RC}$, dans laquelle la variable t est omise.

Remarque : Une solution d'une ED d'ordre n est nécessairement une fonction n fois dérivable.

DÉFINITION

Résoudre ou *intégrer* une équation différentielle (E) c'est trouver *toutes* les fonctions vérifiant l'équation différentielle (E) sur le plus grand intervalle possible.

On appelle *courbe intégrale* de (E) toute courbe d'une solution de (E) .

Exemple : Soit $(E) : y' + ay = 0$. Alors (E) est une ED d'ordre 1, et résoudre (E) signifie trouver toutes les fonctions dérivables y vérifiant : $\forall t \in \mathbf{R}, y'(t) + ay(t) = 0$.

On ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles !

On verra plus loin comment résoudre certaines équations différentielles, dites *linéaires*.

Des méthodes informatiques peuvent être utiles pour obtenir des approximations de solutions d'un grand nombre d'équations différentielles.

II Équations différentielles linéaires (EDL)

1 Définition

DÉFINITION

Une *équation différentielle linéaire d'ordre n* (EDL $_n$) est une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) y^{(k)}(t) = b(t) \quad \text{où } a_0, \dots, a_n \text{ et } b \text{ sont des fonctions continues } (a_n \text{ n'étant pas nulle}).$$

Les fonctions a_k sont appelées les *coefficients* de l'EDL $_n$ et la fonction b est le *second membre*.

Exemple (E) : $(\cos t) y' + (\sin t) y = \cos^3 t$ est une EDL₁, où $\begin{cases} a_0(t) = \\ a_1(t) = \\ b(t) = \end{cases}$

2 EDL homogène (EDLH)

DÉFINITION

Une *équation différentielle linéaire homogène* (EDLH) est une équation différentielle linéaire dont le second membre est la fonction nulle (par abus de langage : *sans second membre*).
L'EDLH associée à une EDL (E) est l'équation différentielle obtenue en remplaçant dans (E) le second membre par la fonction nulle.

3 Structure de l'ensemble des solutions

THÉORÈME

Soient (E) une EDL et (H) son EDLH associée.

Alors la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à la solution générale de (H) une solution particulière de (E) . Autrement dit, si y_p est une solution (quelconque) de (E) , alors :
 y est solution de (E) si et seulement si $y - y_p$ est solution de (H) .

La méthode de résolution des équations différentielles linéaires est donc :

- Étant donnée (E) une EDL, on écrit l'EDLH associée (H) .
- On résout (H) .
- On cherche une solution particulière de (E) .
- On peut conclure en ajoutant à cette solution particulière la solution générale de (H) .

Exemple : Soit $(E_1) : y' - y = t$. Alors (E_1) est une EDL₁.

- l'EDLH associée à (E_1) est $(H_1) : y' - y = 0$.
- On admet provisoirement que les solutions de (H) sont les fonctions $y_0(t) = K.e^t$ avec $K \in \mathbf{R}$.
- On cherche une solution particulière y_1 de (E_1) sous forme d'une fonction affine, on trouve :
- On conclut :

4 Principe de superposition

PROPOSITION

Si (E_1) et (E_2) sont deux EDL de même EDLH et de seconds membres respectifs b_1 et b_2 ,
si y_1 et y_2 sont des solutions particulières respectivement de (E_1) et (E_2) ,
alors $y_3 = y_1 + y_2$ est solution de l'EDL de même EDLH et de second membre $b_1 + b_2$.

III Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1 Forme résolue

DÉFINITION

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (EDL₁) peut s'écrire sous la forme dite *résolue* :
 $y' + a(t)y = b(t)$, où a et b sont des fonctions continues.

2 Résolution de l'EDLH associée

THÉORÈME

Soit $a \in \mathbf{R}$, soit $(H) : y' + ay = 0$ une EDLH d'ordre 1 à coefficient constant.
Alors l'ensemble-solution de (H) est $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ke^{-at}, K \in \mathbf{R}\}$.

Exemples :

$(H_1) : y' - y = 0$ a pour ensemble-solution :

$(H_2) : 5y' + 3y = 0$ a pour ensemble-solution :

THÉORÈME

Soit a une fonction continue sur un intervalle réel I , soit $(H) : y' + a(t)y = 0$.
Alors l'ensemble-solution de (H) est $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ke^{-A(t)}, K \in \mathbf{R}\}$, où A est une primitive quelconque de a sur I .

Exemples : $(H_3) : y' - ty = 0$ a pour ensemble-solution :

$(H_4) : y' - \frac{1}{t \ln t} y = 0$ a pour ensemble-solution :

$(H_5) : y' + \frac{1}{1+t^2} y = 0$ a pour ensemble-solution :

Remarque : on ne sait pas résoudre cette équation si on ne trouve pas de primitive de la fonction a !

3 Méthode de variation de la constante

On détermine une solution particulière y_p de (E) , puis on applique le théorème de structure.

* Si a et b sont des fonctions constantes : on trouve une solution particulière y_p constante.

Exemple : Résoudre $(E_2) : 3y = 7 - 5y'$.

* Sinon :

On tente de résoudre ce type d'EDL₁ par la méthode dite *de variation de la constante* (MVC).

- On écrit une solution $y_p(t) = Ke^{-A(t)}$ de l'homogène associée, où A désigne une primitive de a ,
- On remplace la constante K par une fonction, supposée dérivable : $y_p(t) = K(t)e^{-A(t)}$,
- On exprime y'_p et on injecte dans (E) : $y'_p(t) = K'(t)e^{-A(t)} - K(t)a(t)e^{-A(t)}$

donc y_p vérifie $(E) \Leftrightarrow K'e^{-A} - Kae^{-A} + aKe^{-A} = b \Leftrightarrow K'e^{-A} = b \Leftrightarrow K' = be^A$

- Il suffit donc de savoir intégrer $b(t)e^{A(t)}$ pour obtenir une solution particulière y_p de (E) .

Exemple : Résoudre $(E_3) : y' - ty = 2te^{\frac{t^2}{2}}$.

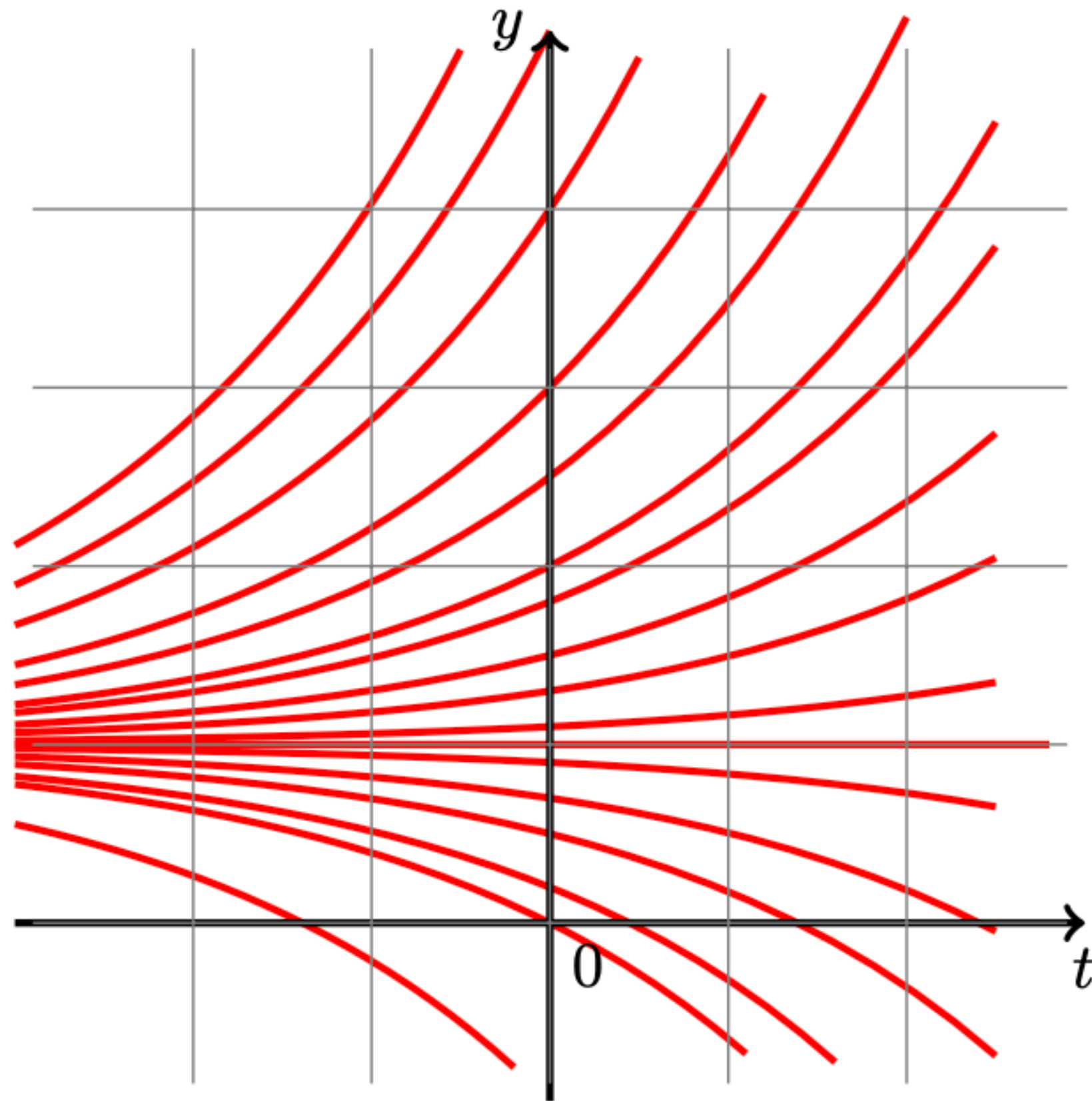
4 Théorème de Cauchy

PROPRIÉTÉ

Soit I un intervalle sur lequel on définit (E) une EDL_1 . Soient $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{R}$ deux réels fixés.
Alors il existe une unique solution y de (E) vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Cette propriété assure que les courbes représentatives de deux solutions de (E) ne peuvent se croiser, et que leur réunion recouvre l'ensemble $I \times \mathbf{R}$.

illustration graphique : Courbes intégrales de $2y' - y + 1 = 0$



Exercice :

Déterminer les solutions y sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de $(E) : y' + (\tan t)y = \cos^2 t$ vérifiant $y(0) = 4$.

Attention ! Si on résout une EDL₁ sur plusieurs intervalles disjoints, une condition initiale doit être donnée **pour chaque intervalle** afin d'assurer l'unicité de la solution.

Exemple : Résolution de $(E) : y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t}$ avec les conditions initiales : $y(1) = 3$ et $y(-1) = 2$.

IV Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1 Résolution de $(H) : ay'' + by' + cy = 0$

THÉORÈME

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Soit (H) l'EDLH₂ : $ay'' + by' + cy = 0$.

On pose $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique de (H) , de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une solution-double réelle r_0 et $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto (At + B)e^{r_0 t}, (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$ et $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto e^{\alpha t}(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.

Remarque : $e^{\alpha t}(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) = C.e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$ après une transformation de Fresnel.

2 Résolution de $(E) : ay'' + by' + cy = d(t)$

- Méthode générale, conditions initiales

Comme pour les EDL₁, on détermine une solution particulière y_p de (E) , puis on applique le théorème de structure : $\mathcal{S}_E = \{y_H + y_p, y_H \in \mathcal{S}_H\}$.

PROPRIÉTÉ

Soit I un intervalle sur lequel on définit (E) une EDL_2 .

Soient $t_0 \in I$, $y_0, z_0 \in \mathbf{R}$ trois réels fixés.

Alors il existe une unique solution y de (E) vérifiant les conditions initiales $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$

En pratique, deux conditions initiales données permettent de fixer les constantes A, B apparaissant dans la solution y_H de l'équation homogène associée.

Attention ! Si on résout une EDL₂ sur plusieurs intervalles disjoints, deux conditions initiales doivent être données **pour chaque intervalle** afin d'assurer l'unicité de la solution.

- Cas où d est une fonction constante

On cherche y_p sous forme d'une fonction polynomiale de degré ≤ 2 .

Exemples : Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y'' - 5y' + 3y = 10$.

Résoudre l'équation différentielle : $2y'' - 5y' = 10$.

Exercice : Déterminer toutes les fonctions y telles que : $4(y' + 1) = 5y + y''$, et $y(0) = y'(0) = 2$.

- Cas où d est une fonction non constante

On suivra les indications de l'énoncé pour déterminer une solution particulière.

Les règles suivantes peuvent être connues, mais ne sont pas exigibles :

- * Si d est une fonction polynomiale de degré n , on trouve une solution particulière sous forme de fonction polynomiale de degré n (si $c \neq 0$), $n + 1$ (si $c = 0$ et $b \neq 0$) ou $n + 2$ (si $c = b = 0$).
- * Si $d(t) = \lambda \cos(\omega t)$, on a $y_p(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ si $b \neq 0$ ou $\omega^2 \neq \frac{c}{a}$, ou $y_p(t) = \alpha t \sin(\omega t)$ sinon.

* Si $d(t) = e^{mt}$ ($m \in \mathbf{R}$), on a $y_p(t) = \alpha e^{mt}$ (si m non solution de l'équation caractéristique),
ou $y_p(t) = \alpha t e^{mt}$ (si m est solution simple), ou $y_p(t) = \alpha t^2 e^{mt}$ (si m est solution-double).
* Si $d(t) = P(t)e^{mt}$ avec $m \in \mathbf{R}$ et P fonction polynomiale, on a $y_p(t) = Q(t)e^{mt}$ avec Q fonction polynomiale de degré $\leq \deg(P) + 2$.

Exercice : Résoudre $(E) : y'' + 2y' + 5y = 10(1 + \cos t)$. Préciser les solutions vérifiant $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$.

