Analyse assymptotique

I Développements limités

1 Approximation polynomiale

Étant donnée une fonction f définie sur un voisinage d'un point x_0, on cherche à comparer localement f à une fonction polynomiale.

Exemples : $\ast$ On a déjà vu que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, ce qui donne un polynôme (ici de degré 1) approchant la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0. On peut écrire : $\boxed{\ln(1+x) \underset{0}{=} x + \mathrm{o}(x)}$.

$\ast$ On sait que $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$, ce qui signifie : $\boxed{}$.

Le polynôme $P =$ de degré 1, approche donc la fonction exponentielle au voisinage de 0.

On cherche maintenant à avoir plus de précision, en déterminant des polynômes de degré supérieur à 1.

Dans la pratique, on se ramène toujours à $x_0 = 0$:

- soit en posant $t = x - x_0$, lorsque $x_0 \in \mathbf{R}^\star$,
- soit en posant $t = \dfrac{1}{x}$ lorsque $x_0 = \pm\infty$.

Exercice : déterminer un polynôme de degré 1 approchant la fonction exponentielle en $x_0 = 2$:

2 Définition d'un DL

DÉFINITION

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbf{R}$.
On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n en x_0 lorsqu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $f(x) \underset{x \to x_0}{=} P(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$.

On note alors que f admet un $\mathbf{DL}_n$ en x_0, et le polynôme P associé se note $P_n(f)$.

Autre formulation :
f admet un $\mathbf{DL}_n$ en x_0 lorsqu'il existe un polynôme P de degré au maximum égal à n tel que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

3 Exemple fondamental

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, définie sur $]-1,1[$.

Alors pour tout $-1 < x < 1$, $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} + \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ (somme géométrique).

Posons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. En $x_0 = 0$, on a : $\dfrac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Ainsi, le polynôme P_n est un DL de f en 0 à l'ordre n : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)}$

4 Propriétés élémentaires

Unicité du DL

Si f admet en x_0 un DL d'ordre n, alors le polynôme $P_n(f)$ associé est unique.

Ceci justifie la notation $P_n(f)$, qu'on appelle *partie principale d'ordre* n de f.

Propriété **Parité / imparité du DL**

Si f est une fonction paire (*resp* : impaire) et possède un DL_n en 0,
alors $P_n(f)$ est un polynôme pair (*resp* : impair).

5 Lien avec la continuité et la dérivabilité

PROPRIÉTÉ

- f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet un DL d'ordre 0 en x_0, et dans ce cas $P_0(f) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
- f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un DL d'ordre 1 en x_0.

Attention ! Il n'y a pas d'équivalence entre être deux fois dérivable, et admettre un DL d'ordre 2.

Exemple : Étude de $f : x \longmapsto 1 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 1$ en $x_0 = 0$.

II Opérations sur les DL

1 Manipulation des ”petits o” en 0

Propriété

Pour tout réel $\lambda \neq 0$ et tout entier n :

- $\lambda \times \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)$

Pour tous entiers n et m :

- si $n > m$, $\quad x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^m) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^m)$
- si $n \geqslant m$, $\quad \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^m) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^m)$
- $x^n \times \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^m) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{n+m})$
- $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \times \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^m) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^{n+m})$

2 Troncature

Propriété

> Si f admet en x_0 un $\mathbf{DL}_n$, alors f admet en x_0 un $\mathbf{DL}_m$ à tout ordre $m \leqslant n$, obtenu en ne conservant dans $P_n(f)$ que les monômes de degré inférieur ou égal à m.

3 Combinaison linéaire

Propriété

Soient f et g admettant en x_0 un $\mathbf{DL}_n$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
Alors $\lambda f + g$ admet en x_0 un $\mathbf{DL}_n$, et $P_n(\lambda f + g) = \lambda P_n(f) + P_n(g)$.

4 Produit de DL

Propriété

Si, en x_0, f admet un $\mathbf{DL}_n$ et g admet un $\mathbf{DL}_m$, alors le produit fg admet en x_0 un $\mathbf{DL}_r$.

On obtient $P_r(fg)$ par troncature du produit $P_n(f) \times P_m(g)$.

5 Quotient de DL

PROPRIÉTÉ

> Si en x_0, f admet un $\mathbf{DL}_n$ et g admet un $\mathbf{DL}_m$, avec $g(x_0) \neq 0$, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ admet en x_0 un $\mathbf{DL}_r$.

6 Composée de DL

PROPRIÉTÉ

> Si $f(x_0) = 0$, si f admet en x_0 un $\mathbf{DL}_n$, et si g admet en 0 un $\mathbf{DL}_m$, alors la composée $g \circ f$ admet en x_0 un $\mathbf{DL}_r$.
>
> On obtient $P_r(g \circ f)$ par troncature de $P_m(g) \circ P_n(f)$.

7 Intégration d'un DL

Propriété

Si f admet en x_0 un $\mathbf{DL}_n$, et si $F' = f$ sur un voisinage de x_0, alors F admet un $\mathbf{DL}_{n+1}$ en x_0.

On a alors : $\boxed{P_{n+1}(F)' = P_n(f)}$.

8 Dérivation d'un DL

On ne peut pas en général dériver un DL.

Contre-exemple : Étude de $f : x \mapsto x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0, prolongée en 0 par 0.

9 DL d'une réciproque

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction admettant un $\mathbf{DL}_n$ en 0 ($n \geqslant 1$), et telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.
On suppose que f est strictement monotone au voisinage de 0. Elle réalise donc localement une bijection, de réciproque f^{-1}.

Alors f^{-1} admet un $\mathbf{DL}_n$ en $0 = f^{-1}(0)$, et : $\boxed{P_n(f^{-1}) \circ P_n(f)(x) \underset{0}{=} P_n(f) \circ P_n(f^{-1})(x) \underset{0}{=} x + \mathrm{o}(x^n)}$.

<u>En pratique</u> : On peut trouver les coefficients d'un $\mathbf{DL}_n$ d'une réciproque en résolvant un système linéaire.

III Développements limités usuels

1 Théorème de Taylor-Young

Théorème Théorème de Taylor-Young

Soit $n \geqslant 1$ et soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}$, telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe.

Alors : $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathrm{o}\left((x - x_0)^n\right)$

Ainsi, le théorème de Taylor-Young affirme que :

$$\boxed{\text{si } f \text{ est } n \text{ fois dérivable en } x_0\text{, alors } f \text{ admet un } \mathbf{DL}_n \text{ en } x_0.}$$

Attention : on a déjà vu que la réciproque est fausse dès que $n \geqslant 2$.

2 Formulaire de développements limités

On établit les formules suivantes **à connaître !** :

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n).$$

$$\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right).$$

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n).$$

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n) \\ &\underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \mathrm{o}(x^n).\end{aligned}$$

En particulier si $\alpha = \dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}x^n+\mathrm{o}(x^n) \underset{0}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}x^k+\mathrm{o}(x^n).$$

IV Applications

1 à l'étude des extrema

Propriété

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}$.
On suppose que $f^{(n)}(x_0)$ existe pour un entier $n \geqslant 2$ et que :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad f^{(k)}(x_0) = 0 \ \ ; \ \text{et} \ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Alors f présente un extremum relatif en x_0 si et seulement si n est pair.
Dans ce cas, c'est un minimum si $f^{(n)}(x_0) > 0$, et c'est un maximum si $f^{(n)}(x_0) < 0$.

2 à l'étude des limites et équivalents

• Lors de l'étude d'une limite, si l'on a affaire à une forme indéterminée, l'obtention d'un **DL** à un ordre suffisant permet éventuellement de lever l'indétermination.

Exercice : Étudier la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$.

- Un équivalent d'une fonction f en x_0 est donné par le premier terme <u>non nul</u> d'un développement limité.

Exercice : Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto \sin x - x \cos x$.

3 Tangentes et positions relatives

On sait que f possède un $\mathbf{DL}_1(x_0)$ si, et seulement si, f est dérivable en x_0.
Ainsi, sa courbe représentative possède une tangente au point d'abscisse x_0.
Si f admet le $\mathbf{DL}_1(x_0)$ suivant : $\quad f(x) \underset{x_0}{=} a + b(x - x_0) + \mathrm{o}\big(x - x_0\big),$

alors $f(x_0) = a$, $f'(x_0) = b$ et l'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est : $y = a + b(x - x_0)$.

De plus, la position de la courbe représentative de f par rapport à la tangente est donnée par le premier terme non nul d'ordre supérieur du développement limité en x_0.
Si $f(x) \underset{x_0}{=} a + b(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + \mathrm{o}\big((x - x_0)^p\big), \quad$ avec $a_p \neq 0$,
alors : $f(x) - (a + b(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p$, et est donc du signe de $a_p(x - x_0)^p$.

* Si p est pair, cette quantité est du signe de a_p.
* Si p impair, cette quantité change de signe en x_0 et la courbe présente un **point d'inflexion**.

V Branches infinies des courbes

DÉFINITION

On dit que la courbe représentative d'une fonction f présente une **branche infinie** :

- lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, avec $a \in \mathbf{R}$,
- ou lorsque f est définie sur un intervalle non borné.

Soient f et g deux fonctions. On dit que la courbe représentative de f est **asymptote** à celle de g en $+\infty$ ou $-\infty$ si : $\lim_{\pm\infty}(f - g) = 0$.

PROPOSITION Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.

- Si $\lim\limits_{a \in \mathbf{R}} f = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$ en a.
- Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = \ell \in \mathbf{R}$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

- Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$:
  - Si $\lim \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique** de direction (Ox).
  - Si $\lim \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique** de direction (Oy).
  - Si $\lim \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}^{\star}$, on étudie $f(x) - ax$.
    a. Si $\lim(f(x) - ax) = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique** dirigée par la droite d'équation $y = ax$.
    b. Si $\lim(f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.

Méthode :
Pour déterminer les équations des asymptotes obliques ainsi que les positions relatives en $\pm\infty$ d'une fonction f, on effectue un **développement asymptotique** de f.

Pour cela, on pose $t = \dfrac{1}{x}$ et on utilise les développements limités connus.

- ln admet une branche infinie parabolique en $+\infty$ de direction (Ox).
- exp admet une branche infinie parabolique en $+\infty$ de direction (Oy).
- La fonction $x \mapsto x + \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.