Fonctions de deux variables

I Continuité de $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$

1 Cadre de l'étude

On étudie dans ce chapitre les fonctions réelles de deux variables réelles, c'est-à-dire les fonctions

$$f : \begin{cases} D \to \mathbf{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{cases} \text{, où } D \text{ est une partie de } \mathbf{R}^2.$$

x et y sont donc des nombres réels, et l'image par f du couple (x,y) est un réel $z = f(x,y)$.

Exemple : $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) \mapsto 5x - y^2 - 1 \end{cases}$ est une fonction réelle de deux variables réelles, définie sur $\mathbf{R}^2$.

On a : $f(2,1) =$ et $f(3,4) =$

2 Pavés de $\mathbf{R}^2$

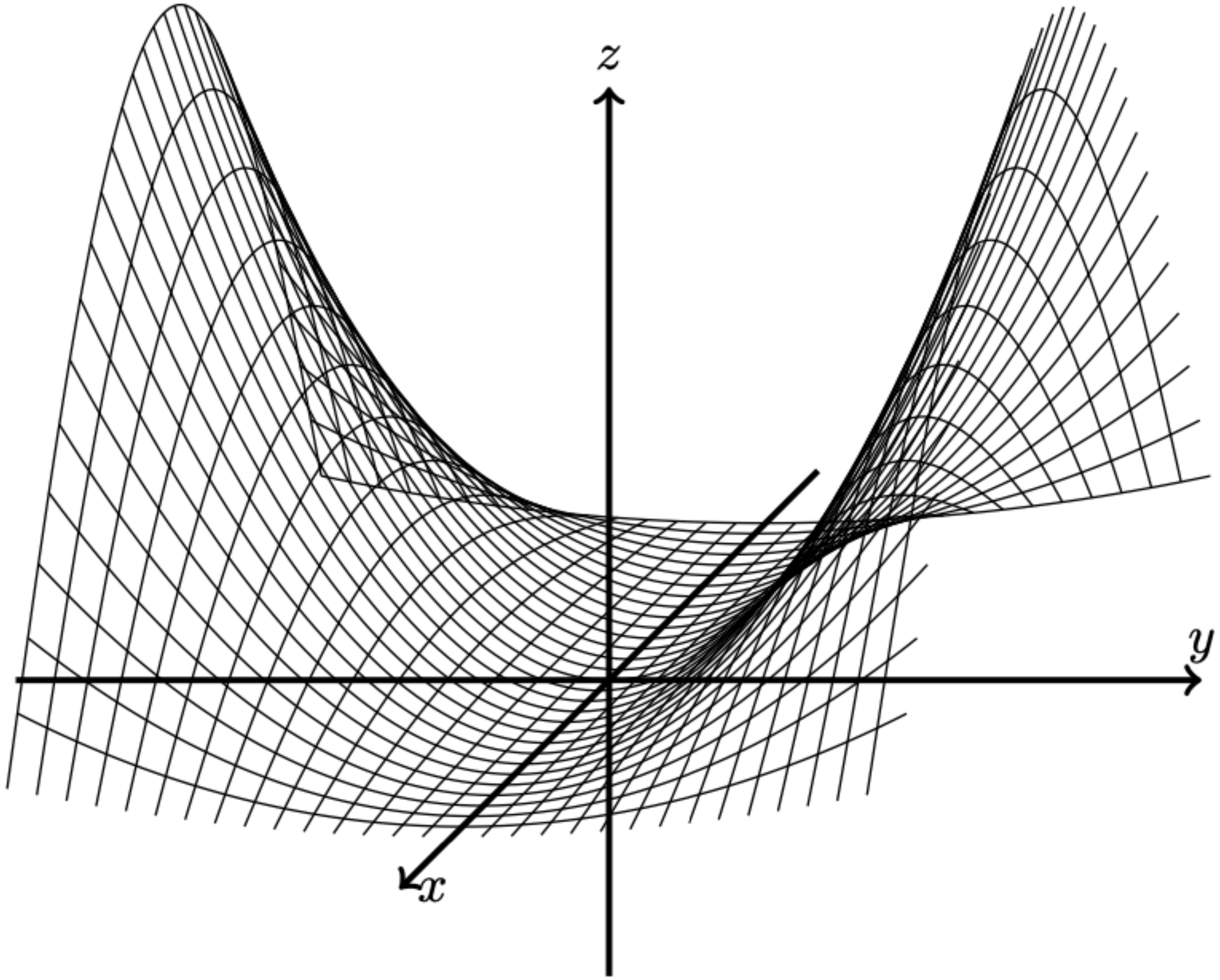
L'ensemble de définition d'une fonction de deux variables réelles est l'ensemble des couples de $\mathbf{R}^2$ qui possèdent une image par cette fonction.

Exemple : $f : (x, y) \mapsto \ln x - \sqrt{1-y}$ est définie sur

3 Nappe d'une fonction de 2 variables

La représentation graphique d'une fonction réelle de deux variables réelles est la surface (ou nappe) de l'espace $\mathbf{R}^3$ définie par : $\mathcal{S}_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ \ z = f(x, y)\right\}$.

Exemple : Représentation graphique (partielle) de $(x, y) \mapsto y^2 \cos x$



4 Distance et limite dans $\mathbf{R}^2$

On munit $\mathbf{R}^2$ de la distance usuelle : $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbf{R}^2,\ \ d((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$.
On notera $\|(x,y)\| = d((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2}$ la **norme** du couple (x,y).

Soit $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$.
On dit que (x,y) *tend vers* (x_0,y_0) dans $\mathbf{R}^2$ lorsque la distance $d((x,y),(x_0,y_0))$ tend vers 0 (dans $\mathbf{R}_+$).

5 Continuité

Définition

- Soit $D \subset \mathbf{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ un point d'accumulation de D.

Une fonction $f : D \to \mathbf{R}$ est continue en (x_0, y_0) lorsque $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

- f est continue sur D lorsque f est continue en tout point de D.

6 Fonctions partielles

Définition

Soient I et J deux intervalles réels, $f : D = I \times J \to \mathbf{R}^2$, et $(x_0, y_0) \in D$.

On appelle **première fonction partielle de f associée à** (x_0, y_0) la fonction $f_1 : \begin{cases} I \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x, y_0) \end{cases}$

On appelle **deuxième fonction partielle de f associée à** (x_0, y_0) la fonction $f_2 : \begin{cases} J \to \mathbf{R} \\ y \mapsto f(x_0, y) \end{cases}$

On retient que f_1 ne fait varier que la première variable, f_2 ne fait varier que la deuxième variable ... et ainsi de suite si on a affaire à une fonction de trois variables ou plus.

Dans le cas des fonctions de deux variables, les représentations graphiques des fonctions partielles s'obtiennent par intersection de la surface $\mathcal{S}_f$ et des plans d'équations $y = y_0$, ou $x = x_0$.

PROPRIÉTÉ

> Si $f : I \times J \to \mathbf{R}$ est continue sur $I \times J$, alors pour tout $(x_0, y_0) \in I \times J$, les fonctions partielles de f associées à (x_0, y_0) sont continues (sur I ou sur J).

7 Courbes de niveau

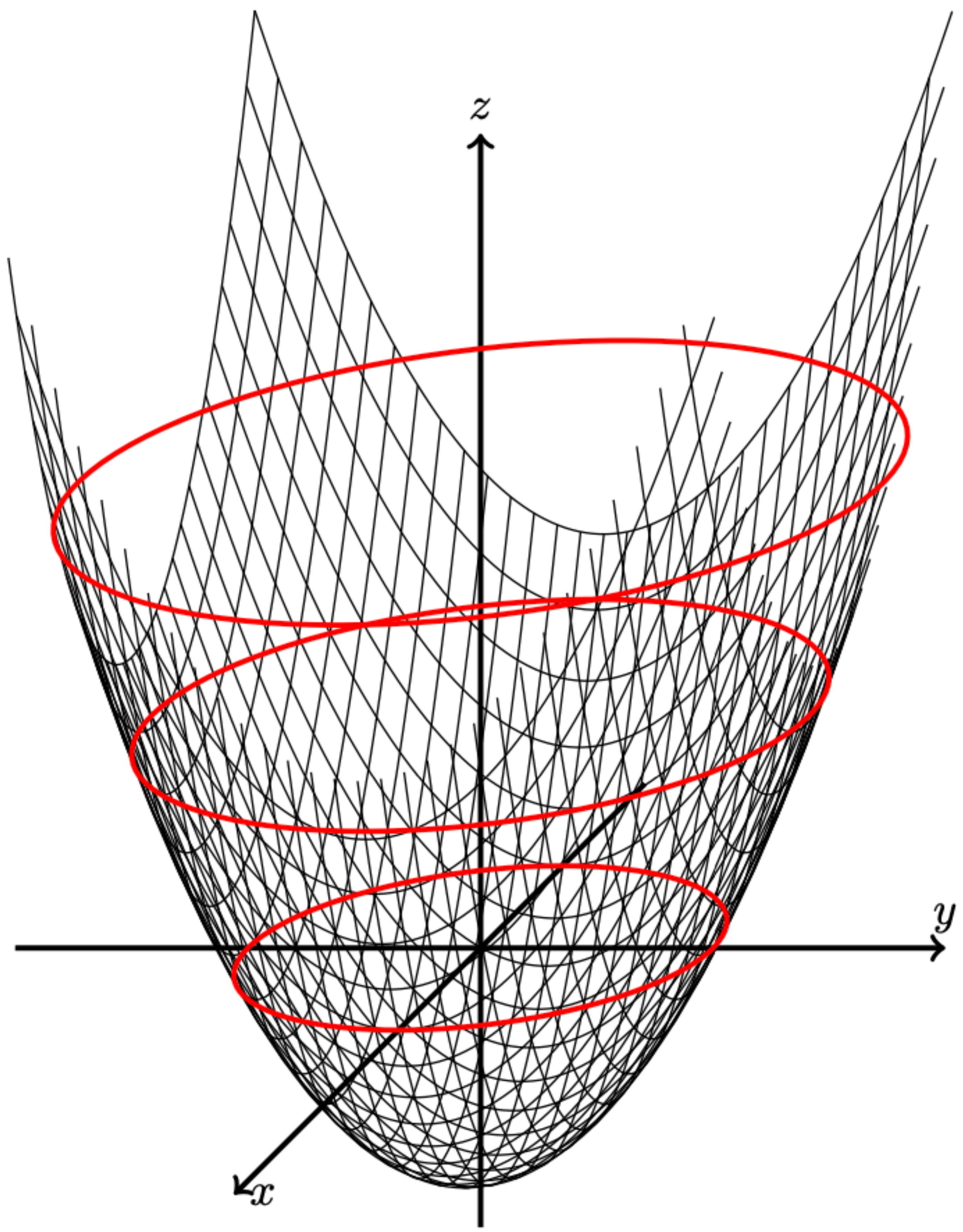
Soit $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de deux variables, représentée par une surface $\mathcal{S}_f$.

Définition

On appelle **courbe de niveau** de f toute intersection de $\mathcal{S}_f$ avec un plan horizontal d'équation $z = z_0$.

On parle aussi de **lignes de niveau** z_0 de la fonction f.

Exemple : Courbes de niveau pour $z_0 = 0, z_0 = 1$ ou $z_0 = 2$ de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$.



II Dérivées partielles

1 Définition

Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction de deux variables définie sur une partie $D = I \times J$ de $\mathbf{R}^2$.
On suppose ici que, pour tout $(x, y) \in D$, les fonctions partielles f_1 et f_2 associées à (x, y) sont dérivables, respectivement sur I et sur J.

DÉFINITION

- La **première dérivée partielle** de f est la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} D \to \mathbf{R} \\ (x,y) \mapsto \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \end{cases}$

- La **seconde dérivée partielle** de f est la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y} : \begin{cases} D \to \mathbf{R} \\ (x,y) \mapsto \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \end{cases}$

Autrement dit, si (x, y) est un point de D, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1'(x)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2'(y)$.

Pour déterminer des dérivées partielles, on dérive l'expression selon une variable, en considérant les autres variables comme des constantes.

Exemples :

$f:(x,y)\mapsto x^3+2xy+4$ admet pour dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}:(x,y)\mapsto$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}:(x,y)\mapsto$

$f:(x,y)\mapsto \dfrac{x+e^y}{x^2+1}$ admet pour dérivées partielles :

2 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

DÉFINITION

Soient I et J des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$.
On dit que $f : D = I \times J \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D lorsque ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent **et sont continues** sur D.

Attention !

Il ne s'agit pas ici de savoir si les fonctions partielles f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ respectivement sur I et sur J. Par exemple si on considère la fonction g donnée en bas de la *page 1*, on obtient les fonctions partielles :

$$g_1 : x \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } y \neq 0, \text{ et } g_1 : x \mapsto 0 \text{ si } y = 0,$$

$$g_2 : y \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } x \neq 0, \text{ et } g_2 : y \mapsto 0 \text{ si } x = 0.$$

Toutes ces fonctions partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), alors que la fonction g n'est même pas continue en $(0,0)$.

3 Le gradient

DÉFINITION

Soit $f : I \times J \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$. Soit $(x, y) \in I \times J$.

On appelle **gradient** de f en (x, y) le couple $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y); \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$.

Il s'agit donc d'un vecteur de $\mathbf{R}^2$, noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y)$.

La propriété précédente peut alors s'écrire à l'aide du *produit scalaire* de $\mathbf{R}^2$:

$$f(x+h, y+k) \underset{h,k\to 0}{=} f(x, y) + \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y) \bullet (h, k) + \mathrm{o}(h, k)$$

4 Approximation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

PROPRIÉTÉ

Si $f : I \times J \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$, alors :

$$f(x+h, y+k) \underset{h,k\to 0}{=} f(x,y) + h \times \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \mathrm{o}(h,k)$$

où $\mathrm{o}(h,k)$ désigne une fonction *négligeable* devant (h,k), *ie* : telle que $\lim\limits_{h,k\to 0} \dfrac{\|\mathrm{o}(h,k)\|}{\|(h,k)\|} = 0$.

5 Dérivée d'une composée

Propriété

Soit $f : I \times J \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soient u, v deux fonctions dérivables sur une partie K de $\mathbf{R}$ et à valeurs respectivement dans I et dans J.

Alors la fonction $g : \begin{cases} K \to \mathbf{R} \\ t \mapsto f(u(t), v(t)) \end{cases}$ est dérivable sur K, de dérivée :

$$\forall t \in K, \quad g'(t) = u'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

III Applications géométriques

1 Plan tangent à une surface $\mathcal{S}_f$

Soit $f : I \times J \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $(x,y) \in I \times J$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) \neq (0,0)$.

Alors le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$ est le plan passant par M et de vecteur normal $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 Courbes de niveau

Soit $f : I \times J \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $\Gamma = \left\{(x, y, z_0) \in \mathbf{R}^3, \;\; f(x,y) = z_0\right\}$ une courbe de niveau de $\mathcal{S}_f$.

On admet que, dans le plan horizontal d'équation $z = z_0$, la courbe de niveau Γ possède une équation paramétrique de la forme $(x(t), y(t))$ où $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont des fonctions dérivables.
Alors en tout point $M(x, y, z_0)$ de Γ, le vecteur $(x'(t), y'(t))$ est tangent à Γ,
et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x(t), y(t))$ est orthogonal à Γ.

3 Extréma locaux

Soit $f : D = I \times J \to \mathbf{R}$ une fonction de deux variables.

DÉFINITION

On dit que f admet en $(x_0, y_0) \in D$ un maximum (*resp :* minimum) local s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de (x_0, y_0) tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{V} \cap D, \quad f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0) \quad (resp: \quad f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)).$$

Théorème

> Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, et admet un extremum local en un point (x_0, y_0) **intérieur à** D, alors :
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Les dérivées partielles de f s'annulent donc en tout extremum local situé à l'intérieur de l'ensemble de définition de f.

La réciproque est cependant fausse : il se peut que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ sans que f n'admette d'extremum local en (x_0, y_0), et même si le point (x_0, y_0) est intérieur à D.

DÉFINITION

Un point (x_0, y_0) en lequel $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ est appelé un **point critique** de f.

Pour déterminer les éventuels extrema de f, on commence par rechercher les points critiques, qu'on étudie ensuite séparément.
On examine enfin les valeurs de f en les points de D qui ne sont pas intérieurs à D.

IV Dérivées d'ordre supérieur

1 Définition

Lorsque c'est possible, on définit les dérivées partielles d'ordre supérieur de f de la façon suivante :

Dérivées d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Dérivées d'ordre 3 :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right), \quad \ldots$$

Exemple :

Donner toutes les dérivées partielles non nulles de la fonction polynomiale $(x, y) \mapsto x^3 + 3xy + 5y^2$.

2 Fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Définition

Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction de deux variables, soit $k \in \mathbf{N}^\star$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D lorsque toutes les dérivées partielles de f d'ordre k existent et **sont continues** sur D.

3 Théorème de Schwarz

Théorème

Théorème de Schwarz

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, alors $\forall (x,y) \in D, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$

Si f est de classe C^k sur D, alors les dérivées partielles d'ordre k commutent.

4 Approximation d'ordre 2 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

THÉORÈME

Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $(x, y) \in D$ un point intérieur à D. Alors :

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} & f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ & + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) + \mathrm{o}\left(\|(h,k)\|^2\right). \end{aligned}$$