Exercice n°1

Dans cet exercice N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents : c'est le « nombre de changements » au cours des N premiers lancers.
Par exemple, si les 9 premiers lancers donnent successivement :

Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile,

alors la variable X_9 prend la valeur 4 (quatre changements : aux lancers 3, 4, 5 et 8).
Pour tout entier n compris entre 1 et N , on notera P_n l'événement « le n-ième lancer donne Pile » et F_n l'événement « le n-ième lancer donne Face » et on pourra utiliser ces notations pour répondre aux questions suivantes.

1. Justifier que X_N prend ses valeurs dans $\{0, \cdots, N-1\}$.
2. Déterminer, sous forme éventuellement d'un tableau justifié, les lois de X_2 et X_3 ainsi que leurs espérances.
3. Montrer que $P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ et que $P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N}$.
4. a) Justifier que pour tout entier k de $\{0, \cdots, N-1\}$, $P(X_{N+1} = k | X_N = k) = P(X_{N+1} = k | X_N = k-1) = \frac{1}{2}$.
   b) En déduire que pour tout entier k de $\{0, \cdots, N-1\}$, $P(X_{N+1} = k \cap X_N = k) = \frac{1}{2}P(X_N = k)$.
   c) En écrivant l'événement $(X_{N+1} = X_N)$ comme une union disjointe d'événements, montrer que $P(X_{N+1} = X_N) = \frac{1}{2}$.
   d) Déterminer la loi de la variable $X_{N+1} - X_N$.
   e) En déduire que $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$ puis donner $E(X_N)$ en fonction de N .
5. a) Prouver que pour tout k de $\{0, \cdots, N-1\}$
   $$P(X_{N+1} = k) = P(X_{N+1} = k | X_N = k)P(X_N = k) + P(X_{N+1} = k | X_N = k-1)P(X_N = k-1).$$
   b) Montrer, par récurrence sur N que X_N suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$.
   c) Donner la variance de X_N .

Exercice n°2

Partie I : Généralités sur les éléments propres d'un endomorphisme

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
On dit que λ est une valeur propre de f si, et seulement si, il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que $f(x) = \lambda x$ et on définit alors $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \lambda x\}$.

1. Montrer que si λ est un réel alors E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que si λ est une valeur propre de f alors E_λ est stable par f, c'est-à-dire : $\forall x \in E_\lambda, f(x) \in E_\lambda$.
3. Montrer que λ est valeur propre de f si, et seulement si $(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n})$ n'est pas bijective.
4. En déduire que λ est valeur propre de f si et seulement si $(A - \lambda I_n)$ n'est pas inversible.

Partie II : Étude d'un cas concret

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ainsi que f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'image du vecteur $-2e_1 + e_2 + 2e_3$ par f. Qu'a-t-on prouvé ici en rapport avec la Partie I ?
2. a) Montrer que $\text{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^3})$ est une droite vectorielle. On en donnera une base de la forme $\varepsilon_1 = (\star, 1, \star)$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle. On en donnera une base de la forme $\varepsilon_2 = (-3, \star, \star)$.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est une droite vectorielle. On en donnera une base de la forme $\varepsilon_3 = (\star, \star, 1)$.

3. Montrer que $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Ecrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{F}$.

5. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{F}$. Calculer l'inverse P^{-1} de P.

6. En déduire les calculs matriciels "simples" permettant d'obtenir l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°3

Partie I :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2. Justifier que f peut être prolongée par continuité en 0. (On notera toujours f la fonction prolongée).

3. On admet : $e^x - 1 - x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et préciser l'équation de la tangente à sa courbe en 0.

4. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et déterminer la fonction φ telle que : $\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.

5. Dresser le tableau de variations de f en y précisant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition .

Partie II :

On considère la fonction G définie par $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$.

1. Justifier que G est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer le signe de $G(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer G'.

4. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. En observant : $\forall x > 0, \forall t \in [x, 2x], \dfrac{1-e^{-x}}{t} \leqslant \dfrac{1-e^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{1}{t}$, déterminer la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6. Montrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à déterminer.

7. Déterminer l'ensemble K des points en lesquels G^{-1} est dérivable.