Exercice 1

1. Valeurs prises par X_N :
On fait N lancers. On peut ne faire que des piles (ou des faces) dans ce cas $X_N = 0$. On peut aussi alterner à chaque lancer pour obtenir, par exemple, (P, F, P, F, $\cdots$, F, P, F). Dans ce cas $X_N = N-1$.

$\boxed{\text{Conclusion : } X_N(\Omega) \subset \{0, 1, \cdots, N-1\}.}$

2. Lois de X_2 et de X_3 :

- Loi de X_2 : on fait deux lancers donc $\Omega = \{P, F\}^2$ et $\text{Card}(\Omega) = 4$. De plus :
$$[X_2 = 0] = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$$
Tous les lancers sont équiprobables. On obtient donc $P(X_2 = 0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Dès lors $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$.
On a donc $E(X_2) = \frac{1}{2}$.
- Loi de X_3 : en procédant de la même manière on trouve :

x	0	1	2
$P(X_3 = x)$	1/4	1/2	1/4

Et on a donc : $E(X_3) = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$.

$\boxed{\text{Conclusion : } E(X_2) = \frac{1}{2} \text{ et } E(X_3) = 1.}$

3. Probabilités de $(X_N = 0)$ et de $(X_N = 1)$:
L'événement $[X_N = 0]$ correspond aux lancers ne contenant que des piles ou que des faces. C'est-à-dire :
$$[X_N = 0] = (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_N) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_N).$$
Ici, $\Omega = \{P, F\}^N$ donc $\text{Card}(\Omega) = 2^N$. On obtient :
$$P(X_N = 0) = \frac{2}{2^N} = \frac{1}{2^{N-1}}$$
Par ailleurs, réaliser $[X_N = 1]$, correspond aux lancers ne contenant que un changement. Si on regarde ceux qui commencent par pile on obtient :
$[X_N = 0] \cap P_1 = (P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_N) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_N) \cup \cdots \cup (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{N-1} \cap F_N)$.
Il y a donc $(N-1)$ événements ayant tous la probabilité $(1/2)^N$ de se produire (les événements P_i pour i allant de 1 à N étant mutuellement indépendants).

D'où $P([X_N = 0] \cap P_1) = (N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N$. Si on ajoute aussi les tirages qui commencent par face on obtient le résultat suivant : $P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N$

$\boxed{\text{Conclusion : } P(X_N = 0) = \frac{1}{2^{N-1}} \text{ et } P(X_N = 1) = (N-1)\frac{1}{2^{N-1}}.}$

4. a) $P(X_{N+1} = k | X_N = k) = P(X_{N+1} = k | X_N = k-1) = \frac{1}{2}$:
Soit k un entier de $\{0, \cdots, N-1\}$.

- On suppose $[X_N = k]$. L'événement $[X_{N+1} = k]$ est l'événement « le $(N+1)$- ème tirage est le même que le N -ème tirage » . Sa probabilité est 1/2 donc :
$P(X_{N+1} = k | X_N = k) = \frac{1}{2}$.
- On suppose $1 \leqslant k \leqslant N$ et $[X_N = k-1]$. L'événement $[X_{N+1} = k]$ est l'événement « le $(N+1)$- ème tirage est différent de N -ème tirage » . Sa probabilité est 1/2 donc :
$P(X_{N+1} = k | X_N = k-1) = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall k \in \{0, \cdots, N-1\}, P(X_{N+1} = k | X_N = k) = P(X_{N+1} = k | X_N = k-1) = \frac{1}{2}.}$

b) $P(X_{N+1} = k) \cap X_N = k) = \frac{1}{2} P(X_N = k)$.
Soit $k \in \{0, \cdots, N-1\}$. On a :
$P(X_{N+1} = k \cap X_N = k) = P(X_{N+1} = k | X_N = k) P(X_N = k)$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall k \in \{0, \cdots, N-1\}, P(X_{N+1} = k \cap X_N = k) = \frac{1}{2} P(X_N = k).}$

c) $P(X_{N+1} = X_N) = \frac{1}{2}$:
$$\begin{aligned} P(X_{N+1} = X_N) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{N-1} (X_{N+1} = k \cap X_N = k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} P(X_N = k) \quad \text{cette union étant disjointe} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} P(X_N = k) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } P(X_{N+1} = X_N) = \frac{1}{2}.}$

d) Loi de $X_{N+1} - X_N$:

- $(X_{N+1} - X_N)(\Omega) = \{0, 1\}$ du fait qu'entre deux tirages successifs il y a ou non un changement.
- Par ailleurs, $[X_{N+1} - X_N = 0] = [X_{N+1} = X_N]$. On conclut en utilisant la question précédente.

$\boxed{\text{Conclusion : } X_{N+1} - X_N \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$

e) $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$:

On a $X_{N+1} = X_N + (X_{N+1} - X_N)$. En utilisant la linéarité de l'espérance on obtient que $E(X_{N+1}) = E(X_N) + E((X_{N+1} - X_N) = E(X_N) + \frac{1}{2}$.

On constate donc que $E(X_N)$ est une suite arithmétique de raison $1/2$, de premier terme $E(X_2) = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Conclusion : } E(X_N) = \frac{N-1}{2}.}$

5. a) $P(X_{N+1} = k) = P(X_{N+1} = k | X_N = k) P(X_N = k) + P(X_{N+1} = k | X_N = k-1) P(X_N = k-1)$:

On écrit ici le théorème des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X_N = k]\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall k \in [\![0, N]\!],\ P(X_{N+1} = k) = P(X_{N+1} = k | X_N = k) P(X_N = k) + P(X_{N+1} = k | X_N = k-1) P(X_N = k-1).}$$

b) Loi de X_N

Soit $\mathcal{H}_N$: "$X_N \sim \mathcal{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$". Prouvons par récurrence que $\mathcal{H}_N$ est vraie pour tout $N \geqslant 2$.

- Initialisation : La loi de X_2 a été décrite à la question 2 et, en effet, $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathcal{B}\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
  Ainsi, $\mathcal{H}_2$ est vraie.
- Hérédité : Soit $N \geqslant 2$. Supposons $\mathcal{H}_N$ vraie.
  $k \in [\![1, N]\!]$. On a :
  $$\begin{aligned} P(X_{N+1} = k) &= P(X_{N+1} = k | X_N = k) P(X_N = k) + P(X_{N+1} = k | X_N = k-1) P(X_N = k-1) \\ &= \tfrac{1}{2}\tbinom{N-1}{k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-1} + \tfrac{1}{2}\tbinom{N-1}{k-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-1} \\ &= \tbinom{N}{k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{N} \end{aligned}$$
  Ainsi $\mathcal{H}_{N+1}$ est vraie.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall N \geqslant 2, X_N \sim \mathcal{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right).}$

c) Variance de X_N :

D'après les résultats connus sur les lois binômiales, $V(X_N) = (N-1) \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)$.

$\boxed{\text{Conclusion : } V(X_N) = \frac{N-1}{4}.}$

Exercice 2

Partie I : Généralités sur les éléments propres d'un endomorphisme

1. E_λ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$:
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.
   Conclusion : Si λ est réel alors E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. E_λ est stable par f :
   Soit λ une valeur propre de f et $x \in E_\lambda$.
   Alors : $f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$) et on a bien $f(x) \in E_\lambda$.
   Conclusion : Si λ est valeur propre de f, alors E_λ est stable par f,

3. λ valeur propre de f équivaut à $(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ non bijective :
$$\begin{aligned}(\lambda \text{ valeur propre de } f) &\iff (\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \neq \{0\})\\ &\iff ((f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \text{ non injective })\\ &\iff ((f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \text{ non bijective })\end{aligned}$$
   car $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$
   Conclusion : λ est valeur propre de f si, et seulement si $(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ n'est pas bijective.

4. λ valeur propre de f équivaut à $(A - \lambda I_n)$ non inversible :
   Il s'agit de la traduction matricielle relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de la propriété démontrée ci-dessus.
   En effet $A - \lambda I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.
   Conclusion : λ est valeur propre de f si et seulement si $(A - \lambda I_n)$ non inversible.

Partie II : Étude d'un cas concret

1. Image de $-2e_1 + e_2 + 2e_3$ par f :
   En traduisant le problème à travers les coordonnées dans la base canonique, on obtient :
$$\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
   Conclusion : $f(-2e_1 + e_2 + 2e_3) = -(-2e_1 + e_2 + 2e_3)$ et -1 est une valeur propre de f dont $-2e_1 + e_2 + 2e_3$ est un vecteur propre associé.

2. a) $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \iff \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -3x & -6y & & = 0 \\ 6x & +8y & +2z & = 0 \\ & 2y & -z & = 0 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \iff \begin{cases} x & +2y & & = 0 \\ & -2y & +z & = 0 \\ & 2y & -z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = 2y \end{cases}$$
   Ainsi $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{Vect}(-2, 1, 2)$. De plus $(-2, 1, 2)$ étant non nul, la famille composée de ce vecteur est libre.
   Conclusion : $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ est une droite vectorielle de base $\varepsilon_1 = (-2, 1, 2)$.

   b) $\mathrm{Ker}(f)$:
   En raisonnant de même, on a :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{cases} -4x & -6y & & = 0 \\ 6x & +7y & +2z & = 0 \\ & 2y & -2z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ y = y \\ z = y \end{cases}$$
   Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(-3, 2, 2)$. De plus $(-3, 2, 2)$ étant non nul, la famille composée de ce vecteur est libre.
   Conclusion : $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle de base $\varepsilon_2 = (-3, 2, 2)$.

   c) $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$:
   De même,
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \iff \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \\ z = z \end{cases}$$
   Ainsi $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{Vect}(-2, 2, 1)$. De plus $(-2, 2, 1)$ étant non nul, la famille composée de ce vecteur est libre.
   Conclusion : $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ est une droite vectorielle de base $\varepsilon_3 = (-2, 2, 1)$.

3. $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ base de $\mathbb{R}^3$:
   Cette famille étant de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, vérifions simplement qu'elle est libre pour conclure.
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$
   $\mathcal{F}$ est donc une famille libre de cardinal la dimension de $\mathbb{R}^3$.
   Conclusion : $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Matrice de f dans $\mathcal{F}$:

Par construction, $f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = 0$ et $f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$.

Conclusion : $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{F}$:

Par définition, $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons son inverse via la résolution d'un système :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X = -2x - 3y - 2z \\ Y = x + 2y + 2z \\ Z = 2x + 2y + z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y = x + 2y + 2z \\ X + 2Y = y + 2z \\ Z - 2Y = -2y - 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y = x + 2y + 2z \\ X + 2Y = y + 2z \\ Z - 2Y + 2(X + 2Y) = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y = x + 2y + 2z \\ X + 2Y - 2(2X + 2Y + Z) = y \\ 2X + 2Y + Z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Conclusion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Expression de A^n :

On a $A' = P^{-1}AP$ d'où : $A = PAP^{-1}$. De plus, par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = p(A')^n P^{-1}$.

P et P^{-1} sont connues et A' étant diagonale : $(A')^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Conclusion : A^n s'obtient en faisant ce calcul :
$A^n = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Partie I :

1. Ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f :
f est définie en x si $x \neq 0$.
Conclusion : $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

2. Prolongement en 0 :
$f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-(-x)}{x} = 1$.
Conclusion : On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

3. Etude complète en 0 :

$$\begin{aligned}\forall x \neq 0,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{1-e^{-x}-x}{x^2} \\ &= \frac{-(e^{-x}-1-(-x))}{x^2} \\ &\underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{car} \lim_{x\to 0} -x = 0\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et sa tangente en 0 a pour équation $y = -\dfrac{1}{2}(x-0)+1$

Conclusion : La courbe de f est dérivable en 0 et sa courbe admet pour tangente en 0 la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x+1$.

4. Dérivée de f sur $\mathcal{D}$:
f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions dérivables et :
$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \dfrac{e^{-x}-(1-e^{-x})}{x^2} = \dfrac{e^{-x}(x+1)-1}{x^2}$.
Conclusion : $\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$ avec $\varphi(x) = e^{-x}(x+1)-1$.

5. Tableau de variations de g :
La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -xe^{-x}$. Par conséquent,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$\nearrow$		0		$\searrow$

On en déduit que la fonction φ est négative sur et donc que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ par croissances comparées.
D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

Partie II :

1. G définie sur :
G est définie en x si $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont définies en x et si f est continue entre x et $2x$.
Or ceci est vrai pour tout x réel.
Conclusion : G est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Signe de G :
D'après la partie I : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) > 0$. Ainsi le signe de $\mathrm{G}(x)$ est donné par l'ordre entre x et $2x$. Or : $2x \geqslant x \iff x \geqslant 0$.
Conclusion : G est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.

3. G dérivable sur $\mathbb{R}$ et dérivée :
f étant continue sur $\mathbb{R}$, soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Alors :
$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(2x) - \mathrm{F}(x)$. Ainsi, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme opération et composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{G}'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

Conclusion : G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\mathrm{G}'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

4. G de classe $\mathcal{C}^1$:
G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et dérivable en 0. Reste à savoir si G′ est continue en 0.
Or : $\forall x \neq 0, \dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} = e^{-2x} \times \dfrac{e^x-1}{x} \underset{0}{\sim} e^{-2x} \underset{0}{\sim} 1$. Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} = 1 = \mathrm{G}'(0)$.
Conclusion : G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. Limite de G en $+\infty$:

$\forall x>0, \forall t\in[x,2x], \dfrac{1-e^{-x}}{t}\leqslant \dfrac{1-e^{-t}}{t}\leqslant \dfrac{1}{t}$.

Donc : $\forall x>0, \displaystyle\int_x^{2x}\frac{1-e^{-x}}{t}\mathrm{d}t\leqslant G(x)\leqslant \int_x^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ car ici $x\leqslant 2x$.

Ainsi, $\forall x>0, (1-e^{-x})(\ln(2x)-\ln(x))\leqslant G(x)\leqslant \ln(2x)-\ln(x)$ i.e :
$(1-e^{-x})\ln 2\leqslant G(x)\leqslant \ln 2$.

On conclut grâce au théorème des gendarmes.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=\ln 2$.

6. G bijective :

$\forall x>0, e^{-x}>e^{-2x}$ donc : $\forall x>0, G'(x)>0$ et G étant continue en 0, elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi la fonction G continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[G(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=[0,\ln 2[$.

Conclusion : G réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $J=[0,\ln 2[$.

7. Dérivabilité de G^{-1} :

G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x\in\mathbb{R}_+, G'(x)>0$ (car on a aussi $G'(0)=1>0$), donc $G'(x)\neq 0$. Ainsi G^{-1} est dérivable sur $G(\mathbb{R}_+)=[0,\ln 2[$.

Conclusion : G^{-1} est dérivable sur $K=[0,\ln 2[$.