

On utilise des méthodes informatiques pour trouver des solutions approchées à des problèmes mathématiques.

I Solutions approchées d'une équation $f(x) = y$

1 La méthode de dichotomie

a Rappel de codage

```
def dichotomie (f, a, b, epsilon) :
    while b - a > epsilon :      # Une boucle while qui s'arrête quand l'intervalle est assez petit,
        c = (a + b) / 2          # On détermine le centre de l'intervalle [a, b]
        if f(a) * f(c) < 0 : b = c    # Le nouvel intervalle est [a, c]
        else : a = c                # Le nouvel intervalle est [c, b]
    return a
```

b Travail à réaliser

Déterminer des valeurs approchées à 10^{-6} près des solutions des équations suivantes :

$$(E_1) : \ln x + e^x = 6 \text{ sur } [1, 3]$$

$$(E_3) : e^x = x^3 \text{ sur } [1, 3]$$

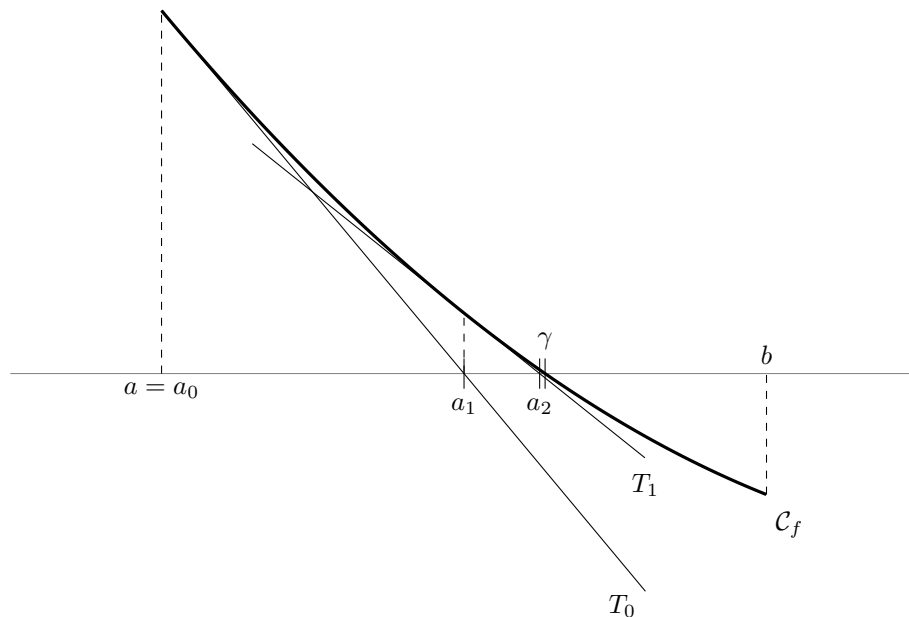
$$(E_2) : 2 \sin x = x \text{ sur } \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

$$(E_4) : \operatorname{Arctan} x = \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbf{R}_+^*.$$

2 La méthode de Newton

a Le principe

La méthode s'applique lorsque f est dérivable, et lorsque f' ne s'annule pas : on détermine la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = a_0$, et on calcule l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses, nommé a_1 . On réitère : T_1 est la tangente $\mathcal{C}_f$ en a_1 , et a_2 l'abscisse du point d'intersection de T_1 avec l'axe des abscisses, etc. La suite $(a_n)_n$ converge vers γ , vérifiant $f(\gamma) = 0$.



On détermine par récurrence a_{n+1} en écrivant une équation de la tangente $T_n : y = f'(a_n)(x - a_n) + f(a_n)$,

et en résolvant : $f'(a_n)(a_{n+1} - a_n) + f(a_n) = 0$ donne
$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

On s'arrête lorsque l'écart entre deux termes consécutifs de (a_n) est inférieur à la précision souhaitée.

b Travail à réaliser

- Définir la fonction `newton(f, fprime, a, epsilon)`.
- Reprendre les équations précédentes avec la méthode de Newton.
- Comparer les deux méthodes (vitesse de convergence).

On pourra introduire un compteur permettant de savoir combien d'itérations ont été nécessaires pour obtenir le résultat.

II Calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue

1 La méthode des rectangles

a Rappel de codage

```
def rectangles(f, a, b, N) :  
    S, pas = 0, (b-a)/N  
    for k in range(N) :  
        S += f(a + k*pas)  
    return S*pas
```

b Travail à réaliser

Donner des valeurs approchées de :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{10} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad J = \int_0^2 \sqrt{2x - x^2} dx, \quad W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt \quad (n \in \mathbf{N}).$$

2 La méthode des trapèzes

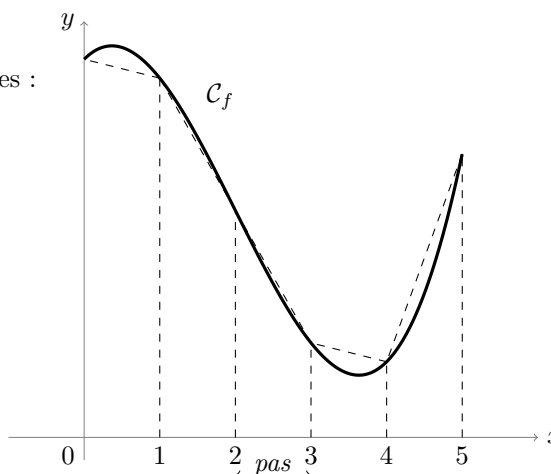
On trace des trapèzes plutôt que des rectangles :

* Écrire une fonction `trapezes(f,a,b,N)` selon cette méthode.

* Comparer son efficacité à la méthode des rectangles.

Rappel : l'aire d'un trapèze de hauteur h et de bases b_1 et b_2 est : $\mathcal{A} = \frac{h(b_1 + b_2)}{2}$.

Dans la figure ci-contre, la hauteur commune des trapèzes est leur dimension horizontale, c'est-à-dire le pas h .



3 Une approximation d'ordre 2 : la méthode de Simpson

La méthode des rectangles utilise des fonctions constantes (polynomiales de degré ≤ 0) sur chaque intervalle, celle des trapèzes utilise des fonctions affines (polynomiales de degré ≤ 1).

La *méthode de Simpson (1710-1761)* utilise des fonctions polynomiales de degré ≤ 2 .

On approxime l'intégrale d'une fonction continue f entre a_i et a_{i+1} par celle de l'unique fonction polynomiale de degré ≤ 2 égale à f en a, b et $\frac{a+b}{2}$.

Travail à réaliser

1. On pose $c = \frac{a+b}{2}$, et $P(x) = f(a) \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b) \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c) \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

Montrer que $P \in \mathbf{R}_2[X]$ et que : $f(a) = P(a)$, $f(b) = P(b)$, $f(c) = P(c)$.

2. Montrer que : $\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(c) + f(b))$.

3. En déduire une fonction `simpson(f,a,b,N)` renvoyant une valeur approchée de $\int_a^b f$ en utilisant une subdivision de pas $h = \frac{b-a}{N}$.

4. Comparer l'efficacité de cette méthode par rapport à celles des méthodes précédentes.