I Définition et exemples

1. Axiomes des espaces vectoriels ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Vecteurs géométriques du plan ou de l'espace
3. L'ensemble $\mathbf{K}^n$ ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Autres exemples d'espaces vectoriels
5. Calculs dans un espace vectoriel ($\rightarrow$ *Annexe*)

II Sous-espaces vectoriels

1. Combinaisons linéaires de vecteurs
2. Définition d'un sous-espace vectoriel ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Exemples
4. Intersection de sous-espaces vectoriels ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Sous-espace vectoriel engendré ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Familles particulières de vecteurs

1. Famille génératrice ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Famille libre, famille liée ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Base ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Dimension

1. Espace vectoriel de base finie ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Cardinaux de familles libres, génératrices ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Dimension d'un sous-espace vectoriel
4. Rang d'une famille de vecteurs ($\rightarrow$ *Annexe*)

V Aspect matriciel dans $\mathbf{K}^n$

1. Matrice d'un vecteur relativement à une base
2. Rang d'une famille de vecteurs
3. Matrice d'une base ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Matrices de passage ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Changement de base ($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

1.1 Axiomes des espaces vectoriels $(E, +, .)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel si et seulement si :

$+ : E \times E \longrightarrow E$

Propriétés de l'addition

- Associativité : $(x+y)+z = x+(y+z)$
- Commutativité : $x+y = y+x$
- Élément neutre : $0_E + x = x + 0_E = x$
- Symétrique : $\exists(-x),\ (-x)+x = x+(-x) = 0_E$

$. : \mathbf{K} \times E \longrightarrow E$

Propriétés du produit externe

- Élément neutre : $1.x = x$
- Distributivité 1 : $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
- Distributivité 2 : $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
- Associativité : $(\lambda\,\mu).x = \lambda.(\mu.x)$

1.3 L'ensemble $\mathbf{K}^n$ des n-uplets sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{K}^n$.
On pose : $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,   et pour $\lambda \in \mathbf{K},\ \lambda.x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$
Alors $(\mathbf{K}^n, +, .)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1.5 Calculs dans un espace vectoriel $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K},\ \forall x, y \in E$

- $x - y = x + (-y)$
- $\lambda.0_E = 0_E$
- $\lambda(-y) = -\lambda.y$
- $\lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$
- $0.x = 0_E$
- $(-\mu).x = -\mu.x$
- $(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$
- $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

2.2 F sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\begin{cases} F \subset E,\ F \neq \varnothing \\ \forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2,\ \ \lambda.x + \mu.y \in F \end{cases}$

2.4 Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

2.5 Le sous-espace engendré par $P \subset E$, $P \neq \varnothing$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de P.
On le note : $\mathrm{Vect}(P)$.

3.1 Famille génératrice : La famille $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice de E si et seulement si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$.
Tout vecteur de E est alors combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$. On dit aussi que $\mathcal{F}$ engendre E.

3.2 Liberté : La famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle de vecteurs de $\mathcal{F}$ est la combinaison linéaire triviale.
$\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ est libre $\Leftrightarrow \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^n,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0.$

3.3 Base d'un espace vectoriel :
Une famille $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel E si et seulement si elle est libre et génératrice.
Conséquence : tout $x \in E$ s'écrit **de façon unique** comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$.
Si $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une base de E, alors : $\forall x \in E,\ \exists!\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ \ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i$
Les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.
Théorème (admis) : Tout espace vectoriel non nul ($E \neq \{0_E\}$) possède au moins une base.

4.1 Espace vectoriel de base finie
Théorème : Si E possède une base finie, alors toutes les bases de E sont finies, de même cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$.
Dans ce cas, on appelle **dimension** de E le cardinal commun à toutes ses bases : $\dim(E) = n$.

4.2 Dans un espace vectoriel E de dimension finie n :
- toute famille génératrice est de cardinal $p \geqslant n$.
- toute famille génératrice de cardinal n est une base de E.
- toute famille libre est de cardinal $p \leqslant n$.
- toute famille libre de cardinal n est une base de E.

4.4 Rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E
Définition : le rang de $\mathcal{F}$ est la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. On le note : $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$.
Soit $\mathcal{F}$ une famille de cardinal p, de rang r dans un espace de dimension finie n. Alors :
- $r \leqslant n$, et $\mathcal{F}$ est génératrice $\Leftrightarrow r = n$. Dans ce cas, $p \geqslant n$.
- $r \leqslant p$ et $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow r = p$. Dans ce cas, $p \leqslant n$.
- $\mathcal{F}$ est une base $\Leftrightarrow r = p = n$.

5.3 Matrice d'une base $\quad$ Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{K}^n$.
Une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de $\mathbf{K}^n$ est une base de $\mathbf{K}^n$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

5.4 Matrices de passage $\quad$ Soient $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ et $\mathcal{B}' = (u'_1, \cdots, u'_n)$ deux bases de $\mathbf{K}^n$.
Alors la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u'_1, \cdots, u'_n)$ est la **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$**.
On note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Propriété : Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de $\mathbf{K}^n$.
Alors : $\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ $\quad$ et $\quad$ $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$

5.5 Formule de changement de bases : $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbf{K}^n$. Soit $v \in \mathbf{K}^n$.
Soient $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $C' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$. Alors : $\boxed{C = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times C'}$