I Rappels et compléments

1. Dérivée en x_0, dérivée à droite, à gauche ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Lien avec la continuité ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Fonction dérivée, notations
4. Lien avec les tangentes ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Cas de non dérivabilité

II Opérations sur les fonctions dérivables

1. Somme ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Produit externe ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Produit ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Inverse, quotient ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Composée ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Réciproque ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Dérivées usuelles

1. Formulaire des fonctions usuelles ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Formulaire des composées ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Dérivées d'ordres supérieurs

1. Fonction n fois dérivable
2. Classes de fonctions
3. Cas des fonctions usuelles

V Théorème de Rolle et applications

1. Extremum relatif ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Théorème de Rolle ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Théorème des accroissements finis (TAF) ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Inégalité des accroissements finis (IAF) ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Variations des fonctions dérivables ($\rightarrow$ *Annexe*)

VI Généralisation du TAF

1. Théorème de Taylor-Lagrange ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Application aux fonctions exp, cos, sin ($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

<u>1.1 Définition du nombre dérivé en x_0</u> : $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

<u>1.2 Lien avec la continuité</u> :

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0 et $f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + h.f'(x_0) + \mathrm{o}(h)$.

<u>1.4 Équations des tangentes</u> : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

<u>2. Opérations sur les fonctions dérivables</u> :

$*$ u, v sont deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Alors $u+v$, λu, $u \times v$ et (si v ne s'annule pas) $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I, avec :

$(u+v)' = u' + v'$ $\quad (\lambda u)' = \lambda u'$ $\quad (u \times v)' = u'v + uv'$ $\quad \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$*$ Si $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

$*$ Si $f : I \longrightarrow J$ est dérivable et bijective, de bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$,
si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

<u>3. Dérivées usuelles</u> : **Voir Chapitre 2**

Nouvelle fonction usuelle : Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et : $\forall x \in \mathbf{R},\ \mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Si u est dérivable, alors $\mathrm{Arctan}(u)$ est dérivable et : $(\mathrm{Arctan}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

<u>5.1 Extremum relatif</u> : Si f est dérivable en x_0 et admet en x_0 un extremum relatif, alors $f'(x_0) = 0$.

<u>5.2 Théorème de Rolle</u> : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

<u>5.3 TAF</u> : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a).f'(c)$

<u>5.4 IAF</u> : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
On suppose que $|f'|$ est bornée sur $]a,b[$ et on pose $M = \sup\limits_{x\in]a,b[} |f'(x)|$.
Alors : $|f(b) - f(a)| \leqslant M.|b-a|$

<u>5.5 Variations d'une fonction dérivable</u> : Soit f dérivable sur un intervalle réel I.

- f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
- Si f' est positive sur I, et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est négative sur I, et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.

<u>6.1 Théorème de Taylor-Lagrange</u> : $f \in \mathcal{C}^n([a,b]) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a,b[)$.

Alors : $\exists c \in]a,b[,\ f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

<u>6.2 Développements de $e^x, \cos(x), \sin(x)$</u> : $\forall x \in \mathbf{R},\ e^x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

$\forall x \in \mathbf{R},\ \cos x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $\qquad \forall x \in \mathbf{R},\ \sin x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$