I Variables aléatoires réelles (VAR)

1. Définition
2. Image d'une VAR, image réciproque
3. Fonction d'une VAR
4. Loi d'une VAR
5. Fonction de répartition (→ *Annexe*)

II VAR usuelles

1. Loi certaine (→ *Annexe*)
2. Loi uniforme (→ *Annexe*)
3. Loi de Bernoulli (→ *Annexe*)
4. Loi binomiale (→ *Annexe*)

III Moments d'une VAR

1. Espérance (→ *Annexe*)
2. Propriétés de l'espérance (→ *Annexe*)
3. Moments d'ordre r (→ *Annexe*)
4. Variance (→ *Annexe*)
5. Écart-type (→ *Annexe*)

IV Formules des lois usuelles

1. Loi certaine (→ *Annexe*)
2. Loi uniforme (→ *Annexe*)
3. Loi de Bernoulli (→ *Annexe*)
4. Loi binomiale (→ *Annexe*)

V Indépendance

1. Indépendance deux-à-deux (→ *Annexe*)
2. Conséquences (→ *Annexe*)
3. Corrélation (→ *Annexe*)
4. Indépendance mutuelle (→ *Annexe*)

VI Compléments

1. Inégalité de Markov (→ *Annexe*)
2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (→ *Annexe*)
3. Variance d'une somme de VAR (→ *Annexe*)

Annexes

1.5 Fonction de répartition : $F_X : \begin{cases} \mathbf{R} \to [0,1] \\ x \mapsto \mathbf{P}(X \leqslant x) \end{cases}$

2.1 Loi certaine : X suit le loi certaine de valeur a lorsque $X(\Omega) = \{a\}$.
$\mathbf{P}(X = a) = 1$ et $\forall b \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$, $\mathbf{P}(X = b) = 0$.

2.2 Loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$ avec $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ lorsque $X(\Omega) = A$
et $\forall x \in A$, $\mathbf{P}(X = x) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{card}(A)}$

2.3 Loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\begin{cases} \mathbf{P}(X = 1) = p \\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$

2.4 Loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ lorsque $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

3.1 Espérance : $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x)$. Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, alors $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(X = x_i)$

X est une VAR *centrée* lorsque $\mathbf{E}(X) = 0$.

3.2 Propriétés de l'espérance :

- $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$ Linéarité de l'espérance
- Généralisation : soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de VAR, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.
  Alors : $\mathbf{E}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{E}(X_i)$.
- Si $X \geqslant 0$, alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$ Positivité de l'espérance
- Si $X \leqslant Y$, alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$ Croissance de l'espérance.

Définition : $Y = X - \mathbf{E}(X)$ est la VAR centrée associée à X. Elle vérifie : $\mathbf{E}(Y) = 0$.

Formule de transfert : Soit $f : X(\Omega) \to \mathbf{R}$. Alors : $\mathbf{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x)$

3.3 Moments d'ordre r : $\forall r \in \mathbf{N}^\star$, $m_r(X) = \mathbf{E}(X^r) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x^r\, \mathbf{P}(X = x)$.

Remarque : $\mathbf{E}(X) = m_1(X)$

3.4 Variance : $\mathbf{V}(X) = m_2(X - \mathbf{E}(X)) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))^2\big)$

Formule de König-Huygens : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \big(\mathbf{E}(X)\big)^2 = m_2(X) - \big(m_1(X)\big)^2$

Propriété : $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$

3.5 Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ Propriété : $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\sigma(aX + b) = |a|\, \sigma(X)$

4.1 Loi certaine de valeur a : $\mathbf{E}(X) = a$ et $\mathbf{V}(X) = 0$.

4.2 Loi uniforme : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, alors $\mathbf{E}(X) = \dfrac{a + b}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \dfrac{(b - a)(b - a + 2)}{12}$.

On retient : en posant $n = b - a + 1 = \mathrm{card}([\![a, b]\!])$, alors $\mathbf{V}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

4.3 Loi de Bernoulli : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbf{E}(X) = p$ et $\mathbf{V}(X) = p(1 - p)$.

4.4 Loi binomiale : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{V}(X) = np(1 - p)$.

5.1 Indépendance : X, Y sont indépendantes
$\Leftrightarrow \forall\, (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbf{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$
$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

5.2 Formules d'indépendance :

Si X, Y sont indépendantes, alors : $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\, \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$
Attention : la réciproque est fausse.

5.3 Corrélation :

- la **covariance** de X, Y est $\text{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X)) \times (Y - \mathbf{E}(Y))\big)$
- Formule de König-Huygens : $\text{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X).\mathbf{E}(Y)$
- X, Y sont non corrélées si et seulement si $\text{Cov}(X,Y) = 0$.
- Si X, Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X,Y) = 0$ donc X et Y sont non corrélées.

5.4 Indépendance mutuelle : $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes

$$\Leftrightarrow \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

$\Leftrightarrow \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, les événements $[X_1 = x_1], \ldots, [X_n = x_n]$ sont mutuellement indépendants.

- Si $(X_1, \ldots, X_n)$ sont des VAR mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.

- Indépendance par paquets : soit $\mathcal{F} = (X_1, \ldots, X_n)$ une famille de VAR mutuellement indépendantes. Alors toute famille de VAR construites sur des sous-familles (paquets) disjointes de $\mathcal{F}$ est mutuellement indépendante.

6.1 Inégalité de Markov : Si $X \geqslant 0$, alors : $\forall a > 0, \quad \mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(X)}{a}$

6.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Soit X une VAR d'espérance m et d'écart-type σ.

Alors : $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

6.3 Variance d'une somme de variables aléatoires :

- $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\text{Cov}(X,Y)$

- Généralisation : $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) + 2 \times \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{Cov}(X_i, X_j)$.