I Définitions, notations

1. Application linéaire entre deux espaces vectoriels ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Caractérisations ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Ensembles d'applications linéaires ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Composées d'applications linéaires ($\rightarrow$ *Annexe*)

II Noyau et image

1. Images directes et réciproques d'un s-ev ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Noyau et image ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Lien avec l'injectivité et la surjectivité ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Action sur une base

1. Image d'une base par une application linéaire ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Rang d'une application linéaire ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Théorème du rang ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Conséquences ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Représentation matricielle en dimension finie

1. Matrice d'une application linéaire
2. Image d'un vecteur ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Application linéaire associée à une matrice
4. Correspondance des opérations ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Matrices de passage entre deux bases ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Formules de changement de bases ($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

<u>1.1 Définition d'une AL</u> : $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire (un morphisme) si et seulement si
$* \forall u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$
$* \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$

f endomorphisme : linéaire de E dans E,
f isomorphisme : linéaire et bijective de E dans F,
f automorphisme : linéaire et bijective de E dans E.

<u>1.2 Caractérisations</u> : • $f : E \longrightarrow F$ est linéaire $\Leftrightarrow \forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K},\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$
• Si f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

<u>1.3 Ensembles d'AL</u> : $\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E vers F.
$\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E.
$\mathcal{GL}(E, F)$ est l'ensemble des isomorphismes de E vers F.
$\mathcal{GL}(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E.

$\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ sont des $\mathbf{K}$-ev : $f, g \in \mathcal{L}(E, F),\ \lambda \in \mathbf{K} \Rightarrow (\lambda f + g) \in \mathcal{L}(E, F)$.

<u>1.4 Composées d'AL</u> : • Une composée d'AL est linéaire : $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G),\ g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$
• Si f est un isomorphisme, alors sa réciproque f^{-1} est linéaire.

2.1 Images directes et réciproques de s-ev : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, si E_1 est un s-ev de E et F_1 un s-ev de F, alors $f(E_1)$ est un s-ev de F et $f^{-1}(F_1)$ est un s-ev de E.

2.2 Noyau, image d'une AL : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des vecteurs de E d'image nulle par f :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E,\ f(u) = 0_F\} = f^{-1}\big(\{0_F\}\big)$$

- L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble de toutes les images par f des vecteurs de E :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u),\ u \in E\} = f\big(E\big)$$

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un s-ev de E, $\mathrm{Im}(f)$ est un s-ev de F.

2.3 Lien avec injectivité et surjectivité : f injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
f surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = F$

3.1 Image d'une base par une AL : Soit $\mathcal{B}$ une base de E, soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- f est entièrement déterminée, et de façon unique, par $f(\mathcal{B})$.
- $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de F $\Leftrightarrow$ f est injective.
- $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F $\Leftrightarrow$ f est surjective.

3.2 Rang d'une AL : $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \mathrm{rg}\,\big(f(\mathcal{B})\big)$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

3.3 Théorème du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie. Alors : $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)}$

3.4 Conséquence : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E,F de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.
Alors : f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

4.2 Image d'un vecteur : $f \in \mathcal{L}(E,F),\ u \in E,\ v = f(u)$, $\mathcal{B}$ base de E et $\mathcal{B}'$ base de F
Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f),\ X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u),\ Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$, alors : $\boxed{Y = AX}$

4.4 Opérations avec les matrices : $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ bases repectivement des espaces vectoriels E, F, G.

- Si $f, g \in \mathcal{L}(E,F),\ \lambda \in \mathbf{K}$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$
- Si $f \in \mathcal{L}(E), n \in \mathbf{N}$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big)^n$
- Si $f \in \mathcal{GL}(E,F)$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\big)^{-1}$

4.5 Matrices de passage : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$

4.6a Changement de bases pour une application linéaire :
$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E. On note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux bases de F. On note $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Alors : $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$

4.6b Changement de bases pour un endomorphisme :
$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E. On note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors : $\boxed{A' = P^{-1}AP}$