

## I Développements limités (DL)

1. Approximations polynomiales
2. Définition d'un DL
3. Exemple fondamental :  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$
4. Propriétés élémentaires ( $\rightarrow$  *Annexe*)
5. Lien avec la continuité et la dérivabilité ( $\rightarrow$  *Annexe*)

## II Opérations sur les DL ( $\rightarrow$ *Annexe*)

1. Manipulations des "petits o" en 0
2. Troncature
3. Combinaisons linéaires
4. Produit
5. Quotient
6. Composée
7. Intégration
8. Réciproque
9. Dérivation

## III Développements limités usuels ( $\rightarrow$ *Annexe*)

1. Le théorème de Taylor-Young
2. Formulaire des DL usuels en 0

## IV Applications

1. Étude des extrema
2. Étude de limites ou d'équivalents
3. Étude des tangentes

## V Branches infinies des courbes

# Annexes

1.4a Unicité du DL : Si  $f$  admet en  $x_0$  un **DL** d'ordre  $n$ , alors le polynôme  $P_n(f)$  associé est unique.

1.4b Parité, imparité : Si  $f$  est une fonction paire (*resp* : impaire) et possède un **DL** <sub>$n$</sub>  en 0, alors  $P_n(f)$  est un polynôme pair (*resp* : impair).

1.5 Lien avec la continuité et la dérivabilité :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f$  admet un **DL**<sub>0</sub> en  $x_0$ , et dans ce cas  $P_0(f) = \ell$ .
- $f$  dérivable en  $x_0 \Leftrightarrow f$  admet un **DL**<sub>1</sub> en  $x_0$ , et dans ce cas  $f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

2.1 Propriétés des o en 0 : Les égalités suivantes se lisent "quand  $x$  tend vers 0".  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $n, m \in \mathbf{N}$ .

- \*  $\lambda \times o(x^n) = o(x^n)$       \*  $\lambda x^n \times o(x^m) = o(x^{n+m})$       \*  $o(x^n) \times o(x^m) = o(x^{n+m})$
- \* si  $n > m$ ,  $x^n + o(x^m) = o(x^m)$       \* si  $n \geq m$ ,  $o(x^n) + o(x^m) = o(x^m)$

2.2 Troncature : Si  $f$  admet en  $x_0$  un  $\mathbf{DL}_n$ , alors  $f$  admet en  $x_0$  un  $\mathbf{DL}_m$  à tout ordre  $m \leq n$ , obtenu en ne conservant dans  $P_n(f)$  que les monômes de degré inférieur ou égal à  $m$ .

2.3 CL de DL : Soient  $f$  et  $g$  admettant en  $x_0$  un  $\mathbf{DL}_n$ , et soit  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

Alors  $\lambda f + g$  admet en  $x_0$  un  $\mathbf{DL}_n$ , et  $P_n(\lambda f + g) = \lambda P_n(f) + P_n(g)$ .

2.4 Produit : Si, en  $x_0$ ,  $f$  admet un  $\mathbf{DL}_n$  et  $g$  admet un  $\mathbf{DL}_m$ , alors le produit  $fg$  admet un  $\mathbf{DL}_r$ .

On obtient  $P_r(fg)$  par troncature du produit  $P_n(f) \times P_m(g)$ .

2.5 Quotient : Si en  $x_0$ ,  $f$  admet un  $\mathbf{DL}_n$  et  $g$  admet un  $\mathbf{DL}_m$ , avec  $g(x_0) \neq 0$ , alors le quotient  $\frac{f}{g}$  admet en  $x_0$  un  $\mathbf{DL}_r$ .

2.6 Composée : Si  $f(x_0) = 0$ , si  $f$  admet en  $x_0$  un  $\mathbf{DL}_n$ , et si  $g$  admet en  $0$  un  $\mathbf{DL}_m$ , alors  $g \circ f$  admet en  $x_0$  un  $\mathbf{DL}_r$ . On obtient  $P_r(g \circ f)$  par troncature de  $P_m(g) \circ P_n(f)$ .

2.7 Intégration : Si  $f$  admet en  $x_0$  un  $\mathbf{DL}_n$ , si  $F' = f$  sur un voisinage de  $x_0$ , alors  $F$  admet un  $\mathbf{DL}_{n+1}$  en  $x_0$ . On a alors :  $(P_{n+1}(F))' = P_n(f)$ .

2.8 Réciproque : Si  $f$  admet un  $\mathbf{DL}_n$  en  $0$  ( $n \geq 1$ ), et si  $f(0) = 0$  et  $f'(0) \neq 0$ , alors  $f$  est localement bijective au voisinage de  $0$ , et sa bijection réciproque  $f^{-1}$  admet un  $\mathbf{DL}_n$  en  $0 = f^{-1}(0)$ . On a alors :  $P_n(f^{-1}) \circ P_n(f) \underset{0}{=} P_n(f) \circ P_n(f^{-1}) \underset{0}{=} X + o(X^n)$ .

2.9 Dérivation d'un DL : **On ne peut pas en général dériver un DL.**

3.1 Théorème de Taylor-Young :

Soit  $n \geq 1$  et soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbf{R}$ , telle que  $f^{(n)}(x_0)$  existe.

Alors :  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$

3.2 DL usuels en 0 :

$$* \quad \frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

$$* \quad e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$* \quad \cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$* \quad \sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

$$* \quad \ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n).$$

\* Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$  :

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Exemple si  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $n = 3$  :  $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ .