I Généralités

1. Équation fonctionnelle, équation différentielle (ED)
2. Ordre d'une ED, ensemble-solution

II Équations différentielles linéaires (EDL)

1. Définition
2. EDL homogène (EDLH)
3. Structure de l'ensemble-solution ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Principe de superposition ($\rightarrow$ *Annexe*)

III EDL d'ordre 1

1. Forme dite "résolue" ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Résolution de l'EDLH associée ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Méthode de variation de la constante (MVC) ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Théorème de Cauchy ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV EDL d'ordre 2 à coefficients constants

1. Résolution de l'EDLH associée ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Résolution de $(E) : ay'' + by' + cy = d(t)$($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

2.3 Théorème de structure : Soit (E) une EDL, soit (H) son EDLH associée, d'ensemble-solution $\mathcal{S}_{(H)}$.
Alors l'ensemble-solution de (E) est de la forme : $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{y_H + y_p,\ y_H \in \mathcal{S}_{(H)}\right\}$
où y_p est **n'importe quelle** solution de (E).

2.4 Principe de superposition :
Si (E_1) et (E_2) sont deux EDL de même EDLH et de seconds membres respectifs b_1 et b_2, si y_1 et y_2 sont des solutions particulières respectivement de (E_1) et (E_2), alors $y_3 = y_1 + y_2$ est solution de l'EDL de même EDLH et de second membre $b_1 + b_2$.

3.1 Forme "résolue" d'une EDL_1 : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ avec a, b continues

3.2 Solutions d'une EDLH_1 : Soit a une fonction continue sur un intervalle réel I, soit $(H) : y' + a(t)y = 0$.
Alors $\mathcal{S}_{(H)} = \left\{t \longmapsto Ke^{-A(t)},\ \ K \in \mathbf{R}\right\}$, où A est une primitive quelconque de a sur I.

3.3 MVC pour (E) : $y' + a(t)y = b(t)$

* Résoudre (H) : $y' + a(t)y = 0$. On trouve $y = Ke^{-A(t)}$, $K \in \mathbf{R}$, avec $A' = a$.
* Remplacer la constante K par une fonction dérivable $K(t)$.
* Dériver $y = K(t)e^{-A(t)}$ et réinjecter dans (E), puis simplifier.
* On trouve $K'(t) = b(t)e^{A(t)}$, qu'on cherche à intégrer pour trouver $K(t)$.
* Appliquer le théorème de structure avec $y_H = Ke^{-A(t)}$ et $y_p = K(t)e^{-A(t)}$.

3.4 Théorème de Cauchy "linéaire" : Soit I un intervalle sur lequel on définit (E) une EDL_1.
Soient $t_0 \in I,\ y_0 \in \mathbf{R}$. Alors il existe une unique solution y de (E) vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

4.1 Résolution de l'EDLH_2 : $ay'' + by' + cy = 0$, avec a, b, c réels fixés, $a \neq 0$.
On pose $ar^2 + br + c = 0$ l'*équation caractéristique* de (H), de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et $\mathcal{S}_{(H)} = \left\{t \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},\ (A, B) \in \mathbf{R}^2\right\}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une solution-double réelle r_0 et $\mathcal{S}_{(H)} = \left\{t \longmapsto (At + B)e^{r_0 t},\ (A, B) \in \mathbf{R}^2\right\}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$ et $\mathcal{S}_{(H)} = \left\{t \longmapsto e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)),\ (A, B) \in \mathbf{R}^2\right\}$.

4.2 Résolution de l'EDL_2 : $ay'' + by' + cy = d(t)$, avec a, b, c réels fixés, $a \neq 0$, et d continue.

* Le théorème de structure s'applique.
* Si d est constante, on cherche y_p sous forme d'une constante.
* Sinon, **on suit les indications de l'énoncé** pour trouver y_p.
* On doit penser au principe de superposition lorsque $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$.

4.2 Théorème de Cauchy "linéaire" :
Soit (E) une EDL_2 définie sur un intervalle I. Soient $t_0 \in I,\ y_0, y_0' \in \mathbf{R}$.
Alors il existe une unique solution y de (E) vérifiant les conditions initiales $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$