Exercice 6 : Résolution d'équations différentielles linéaires1) $(E_1) : y' + xy = x$ * On pose $(H_1) : y' + xy = 0$ l'équation différentielle linéaire homogène associée. Une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (H_1) est : $\mathcal{S}_{H_1} = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}$.* On cherche une solution particulière de (E_1) sous forme d'une fonction constante. y_p est solution constante de (E_1) si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}, 0 + xy_p = x \Leftrightarrow y_p = 1$.* D'après le théorème de structure, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\mathcal{S}_1 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} + 1, \lambda \in \mathbf{R} \right\}$.2) $(E_2) : \frac{dC}{dt} + k_2 C = a_0 e^{-k_1 t}$ La notation $\frac{dC}{dt}$ indique que la fonction inconnue est C et que la variable est t .Ainsi, k_1, k_2, a_0 sont des constantes (paramètres de l'équation différentielle).* On pose $(H_2) : C' + k_2 C = 0$ l'EDLH associée. On a : $\mathcal{S}_{H_2} = \left\{ t \mapsto \lambda e^{-k_2 t}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}$.* On utilise la méthode de variation de constante (MVC) pour trouver une solution particulière de (E_2) .On pose $C_p(t) = \lambda(t) e^{-k_2 t}$ où λ désigne maintenant une fonction dérivable.On a : $\forall t \in \mathbf{R}, C'_p(t) = \lambda'(t) e^{-k_2 t} - k_2 \lambda(t) e^{-k_2 t}$. Donc C_p est solution de (E_2) si et seulement si : $\forall t \in \mathbf{R}, \lambda'(t) e^{-k_2 t} - k_2 \lambda(t) e^{-k_2 t} + k_2 \lambda(t) e^{-k_2 t} = a_0 e^{-k_1 t} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbf{R}, \lambda'(t) = a_0 e^{(k_2 - k_1)t}$ On pose alors : $\lambda(t) = \frac{a_0}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t}$ si $k_2 \neq k_1$, et $\lambda(t) = a_0 t$ si $k_2 = k_1$.On a donc : $C_p(t) = \frac{a_0 e^{-k_1 t}}{k_2 - k_1}$ si $k_2 \neq k_1$ et $C_p(t) = a_0 t e^{-k_2 t}$ si $k_2 = k_1$.* D'après le théorème de structure, $\mathcal{S}_2 = \left\{ \lambda e^{-k_2 t} + \frac{a_0 e^{-k_1 t}}{k_2 - k_1}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}$ si $k_2 \neq k_1$.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \lambda e^{-k_2 t} + a_0 t e^{-k_2 t}, \lambda \in \mathbf{R} \right\} \text{ si } k_2 = k_1.$$

3) $(E_3) : y' - y \tan x = -\cos x$, d'EDLH associée $(H_3) : y' - y \tan x = 0$.* Une primitive sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ de $x \mapsto -\tan x$ est $x \mapsto \ln |\cos x| = \ln(\cos x)$. $e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\exp \circ \ln \circ \cos(x)} = \frac{1}{\cos x}$. On a donc $\mathcal{S}_{H_3} = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\cos x}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}$.* Recherche d'une solution particulière par MVC. On pose $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\cos x}$, avec λ dérivable.On a : $\forall x \in I, y'_p(x) = \frac{\lambda'(x) \cos x + \lambda(x) \sin x}{\cos^2 x}$. Donc y_p est solution de (E_3) dès que :

$$\forall x \in I, \frac{\lambda'(x) \cos x + \lambda(x) \sin x}{\cos^2 x} - \frac{\lambda(x)}{\cos x} \tan x = -\cos x$$

$$\forall x \in I, \frac{\lambda'(x) \cos x}{\cos^2 x} = -\cos x \Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x) = -\cos^2 x = -\frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\text{On pose donc : } \lambda(x) = -\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}, \text{ donc } y_p(x) = -\frac{2x + \sin(2x)}{4 \cos x}.$$

* D'après le théorème de structure, $\mathcal{S}_3 = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\cos x} - \frac{2x + \sin(2x)}{4 \cos x}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}$.4) $(E_4) : y' \cos x + y \sin x = x$, d'EDLH associée $(H_4) : y' \cos x + y \sin x = 0$.La forme résolue de (H_4) est : $y' + y \tan x = 0$.* $e^{-(-\ln(\cos x))} = \cos x$ donc $\mathcal{S}_4 = \{x \mapsto \lambda \cos x, \lambda \in \mathbf{R}\}$.* Recherche d'une solution particulière par MVC : on pose $y_p(x) = \lambda(x) \cos x$ avec λ dérivable.On a : $\forall x \in I, y'_p(x) = \lambda'(x) \cos x - \lambda(x) \sin x$ donc y_p vérifie (E_4) si :

$$\forall x \in I, (\lambda'(x) \cos x - \lambda(x) \sin x) \cos x + \lambda(x) \cos x \sin x = x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x) \cos^2 x = x \Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x) = \frac{x}{\cos^2 x}. \text{ On cherche donc à intégrer } \frac{x}{\cos^2 x}.$$

Par PPP, en posant $u(x) = \tan x$ et $v(x) = x$, deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I :

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \int u'v = uv - \int uv' = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln(\cos x) + C.$$

On pose donc $\lambda(x) = x \tan x + \ln(\cos x)$, et on a : $y_p(x) = x \sin x + \cos x \ln(\cos x)$.* D'après le théorème de structure, $\mathcal{S}_4 = \{x \mapsto \lambda \cos x + x \sin x + \cos x \ln(\cos x), \lambda \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 8 : L'élevage de poules1) Équation différentielle vérifiée par l'inverse :On pose $y = \frac{1}{P}$. Puisque P est dérivable et ne s'annule pas, alors y est dérivable et $y' = -\frac{P'}{P^2}$.Si P vérifie (E), alors $P' = \frac{1}{4}P - \frac{1}{8000}P^2$ donc $-\frac{P'}{P^2} = -\frac{1}{4P} + \frac{1}{8000}$ donc $y = \frac{1}{P}$ vérifie l'équation différentielle : $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{8000}$.L'équation homogène associée est (H) : $y' + \frac{1}{4}y = 0$, de solution générale $y_H(t) = \lambda e^{-\frac{t}{4}}$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$.Une solution particulière constante y_p se trouve en résolvant $0 = -\frac{1}{4}y_p + \frac{1}{8000}$ donc $y_p = \frac{1}{2000}$.D'après le théorème de structure, $y = \frac{1}{P} = \lambda e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{2000}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.2) Résolution de (E) :Vu ce qui précède, $P(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{\lambda e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{2000}} = \frac{2000}{k e^{-\frac{t}{4}} + 1}$, $k \in \mathbf{R}$.3) Courbe de masse :Si $P(4) = 200$, alors on a une condition initiale qui permet de déterminer la constante k :

$$P(4) = 200 \Leftrightarrow \frac{2000}{k e^{-1} + 1} = 200 \Leftrightarrow k e^{-1} + 1 = 10 \Leftrightarrow k = 9e.$$

* Masse à 12 semaines : $P(12) = \frac{2000}{9e \cdot e^{-\frac{12}{4}} + 1} = \frac{2000}{9e^{-2} + 1} \approx 901,7$ grammes.

* Masse limite : $\lim_{t \rightarrow +\infty} k e^{-\frac{t}{4}} = 0$ donc la masse limite est de 2000 grammes.

Exercice 9 : Une EDL d'ordre 2 à coefficients non constants.On pose (E₁) : $x^2 y'' + x y' - y = 0$, qu'on étudie sur $\mathbf{R}_+^*$.1) Une solution particulière :Si $y_p(x) = x$ alors y_p est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $y_p'(x) = 1$, $y_p''(x) = 0$.On a donc : $x^2 y'' + x y' - y = 0 + x \times 1 - x = 0$ donc $y_p : x \mapsto x$ est solution de (E₁).2) On se ramène à une EDL d'ordre 1 :Soit y une solution de (E₁). On pose $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ pour tout $x > 0$.Alors z est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et : $\forall x > 0$, $z'(x) = \frac{x y'(x) - y(x)}{x^2}$

puis : $\forall x > 0$, $z''(x) = \frac{(y'(x) + x y''(x) - y'(x))x^2 - 2x(x y'(x) - y(x))}{x^4} = \frac{x^2 y''(x) - 2x y'(x) + 2y(x)}{x^3}$.

Puisque y vérifie (E₁), alors $x^2 y'' = y - x y'$ donc $z''(x) = \frac{-3x y'(x) + 3y(x)}{x^3} = -\frac{3}{x} z'(x)$.

Ainsi, z' vérifie l'EDL (E₂) : $y' = -\frac{3}{x}y$.3) Résolution de (E₂) puis de (E₁) :

(E₂) : $y' + \frac{3}{x}y = 0$. Une primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{3}{x}$ est $3 \ln x$, donc $\mathcal{S}_2 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-3 \ln x} = \frac{\lambda}{x^3}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}$.

Si y est solution de (E₁), alors $\exists \lambda \in \mathbf{R}$, $\forall x > 0$, $z'(x) = \frac{\lambda}{x^3}$.

On a donc : $\exists C \in \mathbf{R}$, $\forall x > 0$, $z(x) = -\frac{\lambda}{2x^2} + C$ donc $y(x) = x z(x) = -\frac{\lambda}{2x} + Cx = \frac{k}{x} + Cx$.

Conclusion : $\mathcal{S}_1 = \left\{ x \mapsto \frac{k}{x} + Cx, (k, C) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

Remarque : la solution particulière trouvée à la première question correspond à $k = 0$ et $C = 1$.

Exercice 10 : Autre exemple d'EDL d'ordre 2, pour laquelle on utilise une fonction auxiliaire. On pose $(E) : x^2 y'' + y = 0$ qu'on étudie sur $\mathbf{R}_+^*$.

1) Une nouvelle équation différentielle :

On pose $z(t) = y(e^t)$ avec $e^t = x$ ($t \in \mathbf{R}$).

On dérive deux fois cette relation sur $\mathbf{R}$:

$\forall t \in \mathbf{R}$, $z'(t) = e^t y'(e^t)$ puis $z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$.

Si y est solution de (E) , alors $\forall x > 0$, $x^2 y''(x) + y(x) = 0$ donc $\forall t \in \mathbf{R}$, $e^{2t} y''(e^t) + y(e^t) = 0$.

On remplace : $\forall t \in \mathbf{R}$, $z''(t) = e^t y'(e^t) - y(e^t) = z'(t) - z(t)$.

Ainsi, z vérifie l'équation différentielle $(F) : z'' - z' + z = 0$.

2) Résolution de (F) puis de (E) :

(F) est une EDLH d'ordre 2 à coefficients constants.

On considère l'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = -3 < 0$ et de solutions complexes $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \bar{z}_1$.

D'après le cours, on a donc : $\mathcal{S}_F = \left\{ t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \left(A \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \right), A, B \in \mathbf{R} \right\}$.

Pour tout $x > 0$, on a $y(x) = z(\ln x)$, et $e^{\frac{t}{2}} = e^{\frac{\ln x}{2}} = \sqrt{x}$,

donc : $\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto \sqrt{x} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2}\right) \right), A, B \in \mathbf{R} \right\}$.