Exercice 1 : DL en 0 à l'ordre 3

$$f_1(x) \underset{0}{=} \left(1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\mathrm{o}(x^3)\right)-\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right)$$

$$\underset{0}{=} \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{16}\right)x^3+\mathrm{o}(x^3) \qquad \boxed{f_1(x) \underset{0}{=} \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{24}x^3+\mathrm{o}(x^3).}$$

$$f_2(x) \underset{0}{=} \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)\right)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right)$$

Remarque : un DL à l'ordre 2 de l'exponentielle est suffisant, car le DL de $\ln(1+x)$ est de valuation 1.

$f_2(x) \underset{0}{=} x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^3+\mathrm{o}(x^3)$ donc $\boxed{f_2(x) \underset{0}{=} x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\mathrm{o}(x^3).}$

DL en 0 à l'ordre 3

$\cos x \underset{0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)$ donc $f_4(x) \underset{0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)\right)$. On pose $t=-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)$.

Alors t tend vers 0 quand x tend vers 0, donc on utilise un DL en 0 de $\ln(1+t)$:

$\ln(1+t) \underset{0}{=} t-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$ donc $\boxed{f_4(x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3).}$

$f_5(x)=\sqrt{\cos x}=\sqrt{1+\cos x-1}$ donc en posant $t=\cos x-1$, on a $t \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)$

et puisque t tend vers 0, on utilise le DL de $\sqrt{1+t}$ en 0 :

$f_5(x) \underset{0}{=} 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\mathrm{o}(t^2)$ où l'on s'arrête à l'ordre 2 en t, car $t \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

On obtient alors en remplaçant : $\boxed{f_5(x) \underset{0}{=} 1-\frac{x^2}{4}+\mathrm{o}(x^3).}$

$f_8(x)=\frac{e^x}{\cos x} \underset{0}{=} \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)}$. On pose $t=1-\cos x \underset{0}{=} \frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)$.

Puisque $t\to 0$, on a : $\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-t} \underset{0}{=} 1+t+t^2+\mathrm{o}(t^2)$, donc $\frac{1}{\cos x} \underset{0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)$.

On effectue ensuite le produit : $f_8(x) \underset{0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)\right)$

au final : $\boxed{f_8(x) \underset{0}{=} 1+x+x^2+\frac{2x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3).}$

Exercice 2 : Étude de limite

La limite demandée est une forme indéterminée, du type "$\frac{0}{0}$".

Par équivalent, on n'arrive à rien. On essaie avec un DL.

On cherche d'abord avec un DL d'ordre 2 (un DL d'ordre 1 correspond à l'équivalent)

$$f_3(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x^3}\left(1+x+\frac{1}{2}x^2-1-x-x^2+\frac{x}{2}\times x+\mathrm{o}(x^2)\right) \underset{0}{=} \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^3}=\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mais $\frac{1}{x}$ diverge en 0, donc on ne peut rien conclure.

À l'ordre 3 :

$$f_3(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x^3}\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-1-x-x^2-x^3+\frac{x}{2}\times x+\mathrm{o}(x^3)\right) \underset{0}{=} \frac{-\frac{5}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)}{x^3}=-\frac{5}{6}+\mathrm{o}(1).$$

Conclusion : $\boxed{f_3 \text{ a pour limite } -\frac{5}{6} \text{ en } 0.}$

∗ On a une double forme indéterminée.

∗ Par équivalents : on peut écrire $f_6(x)=x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-x=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x$

et on sait que $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc par produit : $x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x$.
Mais on se retrouve bloqué, avec seulement : $f_6(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$...

$*$ Avec un DL : on commence à l'ordre 2, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
donc : $f_6(x) \underset{+\infty}{=} x^2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) - x \underset{+\infty}{=} -\dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$. Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = -\dfrac{1}{2}.}$

Exercice 3 :
Pour obtenir un DL ailleurs qu'en 0, on se ramène toujours en 0.
Dans la question précédente, on a posé (sans l'écrire) $t = \dfrac{1}{x}$, de sorte que $t \to 0$.
Ici, on pose $t = x - 1$, de sorte que $t \to 0$.
On a alors : $f_7(x) = f_7(1+t) = e^{1+t}\ln(3+t) = e \times e^t \ln\left(3\left(1+\dfrac{t}{3}\right)\right)$
$= e \times e^t \left(\ln 3 + \ln\left(1+\dfrac{t}{3}\right)\right)$

$\boxed{\text{Toujours penser à utiliser les propriétés } e^{a+b} = e^a.e^b \text{ et } \ln(ab) = \ln(a)+\ln(b).}$

Ainsi, $f_7(1+t) \underset{0}{=} e\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}+\mathrm{o}(t^3)\right)\left(\ln 3+\dfrac{t}{3}-\dfrac{t^2}{18}+\dfrac{t^3}{81}+\mathrm{o}(t^3)\right)$
puis on développe à l'ordre 3 :

$$f_7(1+t) \underset{0}{=} e\left(\ln 3 + t\left(\frac{1}{3}+\ln 3\right)+t^2\left(-\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+\frac{\ln 3}{2}\right)+t^3\left(\frac{1}{81}-\frac{1}{18}+\frac{1}{6}+\frac{\ln 3}{6}\right)+\mathrm{o}(t^3)\right)$$

$$f_7(1+t) \underset{0}{=} e\left(\ln 3+\frac{t}{3}(1+3\ln 3)+\frac{t^2}{18}(5+9\ln 3)+\frac{t^3}{162}(20+27\ln 3)+\mathrm{o}(t^3)\right)$$

On remplace enfin t par $x-1$:

$$\boxed{f_7(x) \underset{1}{=} e\ln 3+\frac{e}{3}(1+3\ln 3)(x-1)+\frac{e}{18}(5+9\ln 3)(x-1)^2+\frac{e}{162}(20+27\ln 3)(x-1)^3+\mathrm{o}(x-1)^3.}$$

Exercice 4 : DL à l'ordre $n \in \mathbf{N}$ de $\operatorname{ch} x$ puis de $\operatorname{sh} x$

On sait que : $e^x \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)$. On en déduit que : $e^{-x} \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)$.

On fait la demi-somme : $\operatorname{ch} x \underset{0}{=} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k+(-x)k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)$

Si k est impair, $(-x)^k = (-1)^k x^k = -x^k$ donc $x^k + (-x)^k = 0$.
Si k est pair, $(-x)^k = (-1)^k x^k = x^k$ donc $x^k + (-x)^k = 2x^k$.

Ainsi, $\operatorname{ch} x \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \mathrm{o}(x^n)$.

En posant $k = 2i$, avec $0 \leqslant 2i \leqslant n$, donc $i \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$: $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \operatorname{ch} x \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2i}}{(2i)!} + \mathrm{o}(x^n).}$

De façon similaire : $\operatorname{sh} x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \mathrm{o}(x^n)$

ou encore : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \operatorname{sh} x \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \mathrm{o}(x^n).}$

ch est le 'cosinus hyperbolique', et sh est le 'sinus hyperbolique'. On peut noter la ressemblance avec les DL connus de cos et sin en 0. Il est simple de prouver que ch est une fonction paire, alors que sh est impaire. On en voit les conséquences sur leurs DL.
ch est la 'partie paire' de l'exponentielle, sh en est la 'partie impaire'. On remarque que : $\operatorname{ch} + \operatorname{sh} = \exp$.

Exercice 5 : DL d'Arcsinus en 0

1) Voir le cours : sin est <u>continue</u> et <u>strictement</u> croissante sur <u>l'intervalle</u> $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2a) $\sin' = \cos$ s'annule en $\pm\dfrac{\pi}{2}$, donc $\text{Arcsin} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est dérivable en tout $t \in [-1,1]$ tel que $\text{Arcsin}\, t \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et : $\forall t \in]-1,1[,\ \text{Arcsin}'(t) = \dfrac{1}{\cos(\text{Arcsin}\, t)}$.

Puisque $\text{Arcsin}(t) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\cos(\text{Arcsin}\, t) > 0$ donc $\cos(\text{Arcsin}\, t) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}\, t)}$.

On remplace : $\boxed{\forall t \in]-1,1[,\ \text{Arcsin}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}.}$

2b) On sait que Arcsin est une fonction impaire, et que $\text{Arcsin}\, 0 = 0$.
Un DL d'ordre 4 en 0 sera donc de la forme : $\text{Arcsin}\, t \underset{0}{=} at + bt^3 + o(t^4)$, avec $a, b \in \mathbf{R}$.
Par ailleurs, $\sin t \underset{0}{=} t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^4)$. Enfin, $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\text{Arcsin}(\sin t) = t$, donc en remplaçant :

$$t \underset{0}{=} a\big(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)\big) + b\left(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)\right)^3 + o(t^4)$$

$t \underset{0}{=} at - \dfrac{a}{6}t^3 + bt^3 + o(t^4)$, donc il vient : $\begin{cases} 1 = a \\ 0 = -\frac{a}{6} + b \end{cases}$, donc $a = 1$ et $b = \dfrac{1}{6}$.

Finalement : $\boxed{\text{Arcsin}\, t \underset{0}{=} t + \dfrac{t^3}{6} + o(t^4).}$

Si on oublie que Arcsin est impaire, on part de $\text{Arcsin}\, t \underset{0}{=} at + bt^2 + ct^3 + dt^4 + o(t^4)$, puis même méthode.
On a alors un système avec 4 inconnues (mais qui se résout très facilement).

Exercice 6 : Exemple d'une fonction admettant à tout ordre un DL nul en 0 (sans être la fonction nulle)

<u>1) Étude de continuité</u>

Par opérations, f est continue sur $\mathbf{R}^\star$.
En 0 : par opérations, $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0. $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$

<u>2) Obtention d'un DL</u>

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on a : $\dfrac{f(x)}{x^n} = \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$.
La limite en 0 est une forme indéterminée, dans laquelle l'exponentielle est en concurrence avec une puissance de x. On se ramène à un résultat de croissances comparées :
on pose $t = \dfrac{1}{x}$: $\dfrac{f(x)}{x^n} = t^n f\left(\dfrac{1}{t}\right) = t^n e^{-t^2} = \dfrac{t^n}{e^{t^2}}$.
On pose enfin $u = t^2$, donc $t = \pm\sqrt{u}$ (selon que $x \to 0^+$ ou $x \to 0^-$).
Ainsi : $\dfrac{f(x)}{x^n} = (\pm 1)^n \times \dfrac{u^{\frac{n}{2}}}{e^u}$.

Par croissances comparées, $\dfrac{u^{\frac{n}{2}}}{e^u} \longrightarrow 0$ quand $u \to +\infty$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0.}$

<u>DL à l'ordre n de f en 0</u>

Le résultat précédent s'écrit : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ f(x) \underset{0}{=} o(x^n).}$

Cela signifie qu'en 0, la fonction f est négligeable devant tout polynôme : la meilleure approximation polynomiale de f en 0 est donnée par le polynôme nul.