

**Exercice 1 : Dérivées partielles**1)  $f(x, y) = xe^{\cos(xy)}$ \* Dérivée partielle suivant  $x$  : on considère que  $y$  est constant.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 \times e^{\cos(xy)} + x(-y \sin(xy))e^{\cos(xy)} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1 - xy \sin(xy))e^{\cos(xy)}}.$$

\* Dérivée partielle suivant  $y$  : on considère que  $x$  est constant.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(-x \sin(xy))e^{\cos(xy)} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 \sin(xy)e^{\cos(xy)}}.$$

2)  $g(x, y) = x^2 y^2 \operatorname{Arctan}(xy^2)$ 

$$* \text{ On utilise } (\operatorname{Arctan} u)' = \frac{u'}{1+u^2}, \text{ on trouve : } \boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 \operatorname{Arctan}(xy^2) + \frac{x^2 y^4}{1+x^2 y^4}}.$$

$$* \boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2yx^2 \operatorname{Arctan}(xy^2) + \frac{2x^3 y^3}{1+x^2 y^4}}.$$

3)  $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 

$$* \text{ On utilise } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}. \text{ On trouve : } \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ soit } \boxed{\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}.$$

$$* \text{ De même, } \boxed{\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}. \text{ Remarque : formules valables sur } \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

4)  $i(x, y) = ye^{-x^2+y}$ 

$$* \boxed{\frac{\partial i}{\partial x}(x, y) = -2xye^{-x^2+y}} \quad * \frac{\partial i}{\partial y}(x, y) = 1 \times e^{-x^2+y} + ye^{-x^2+y} \text{ donc } \boxed{\frac{\partial i}{\partial y}(x, y) = (1+y)e^{-x^2+y}}.$$

**Exercice 2 : Dérivée d'une composée** $\forall t > 0, \Phi(t) = V(t^2 + 1, e^t + \ln t - 1)$  avec  $V$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$ .D'après la propriété de dérivation d'une composée :  $\Phi$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$  par opérations, et

$$\boxed{\forall t > 0, \Phi'(t) = 2t \frac{\partial V}{\partial x}(t^2 + 1, e^t + \ln t - 1) + \left(e^t + \frac{1}{t}\right) \frac{\partial V}{\partial y}(t^2 + 1, e^t + \ln t - 1)}.$$

**Exercice 3 : Études d'extrema**1)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^3$ .  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$ .

$$* \text{ On calcule les dérivées partielles de } f : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 3x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

$$* \text{ On cherche les points critiques en résolvant : } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{soit ici : } \begin{cases} 2x - 3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

 $f$  possède donc deux points critiques dans  $\mathbf{R}^2$  :  $(0, 0)$  et  $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ .\* Étude en  $(0, 0)$  :  $f(0, 0) = 0$ . $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = x^2(1-x) + y^2$  donc si  $1-x \geq 0$ , on a :  $f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$ .Ainsi,  $f(0, 0)$  est inférieur ou égal à toute valeur de  $f$  au voisinage de  $(0, 0)$ . $f$  présente un minimum local en  $(0, 0)$ , égal à 0.\* Étude en  $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$  :  $f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{4}{27}$ . On pose  $t = x - \frac{2}{3}$  et on exprime  $f(x, y)$  en fonction de  $t, y$  :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 - \left(t + \frac{2}{3}\right)^3 = t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} + y^2 - t^3 - 2t^2 - \frac{4}{3}t - \frac{8}{27} \\ &= \frac{4}{27} - t^2 - t^3 + y^2 = f\left(\frac{2}{3}, 0\right) - t^2 - t^3 + y^2. \end{aligned}$$

On a donc :  $\delta(x, y) = f(x, y) - f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -t^2 - t^3 + y^2$ .

Si  $t = 0$  (donc  $x = \frac{2}{3}$ ), on voit que :  $\delta\left(\frac{2}{3}, y\right) = y^2 \geq 0$  donc  $f\left(\frac{2}{3}, y\right) \geq f\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ .Ainsi,  $f$  n'admet pas de maximum relatif en  $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ .

Si  $y = 0$ , alors  $\delta(x, 0) = -t^2 - t^3 \leq 0$  pour tout  $t \geq -1$ . Donc  $f(x, 0)$  est inférieur à  $f(\frac{2}{3}, 0)$  dans un voisinage de  $\frac{2}{3}$ .  $f$  n'admet donc pas de minimum relatif en  $(\frac{2}{3}, 0)$ .  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $(\frac{2}{3}, 0)$ .

**2)**  $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ .

\* Calcul des dérivées partielles :  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y$  et  $\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 - 3x$ .

\* Recherche de points critiques :  $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } (1, 1).$

\* Étude en  $(0, 0)$  :  $g(0, 0) = 0$ .

Si  $y = 0$ , on a  $g(x, 0) = x^3$  donc  $x > 0 \Rightarrow g(x, 0) > g(0, 0)$  et  $x < 0 \Rightarrow g(x, 0) < g(0, 0)$ .

$g$  n'admet pas d'extremum local en  $(0, 0)$ .

\* Étude en  $(1, 1)$  :  $g(1, 1) = -1$ . On pose  $t = x - 1$  et  $u = y - 1$ , puis  $\delta(x, y) = g(x, y) - g(1, 1)$ .

En exprimant à l'aide de  $t, u$  :

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g(1+t, 1+u) = (1+t)^3 + (1+u)^3 - 3(1+t)(1+u) \\ &= 1 + 3t + 3t^2 + t^3 + 1 + 3u + 3u^2 + u^3 - 3 - 3t - 3u - 3tu \\ &= -1 + 3t^2 + t^3 + 3u^2 + u^3 - 3tu \end{aligned}$$

$\delta(x, y) = 3t^2 - 3tu + 3u^2 + t^3 + u^3$ . On étudie le signe de  $\delta(x, y)$  lorsque  $t, u$  sont proches de 0.

On factorise :  $t^3 + u^3 = (t+u)(t^2 - tu + u^2)$  donc

$$\delta(x, y) = 3(t^2 - tu + u^2) + (t+u)(t^2 - tu + u^2) = (t^2 - tu + u^2)(3 + t + u)$$

Au voisinage de 0 ; on a :  $3 + t + u \sim 3 > 0$ , donc  $\delta(x, y)$  est du signe de  $t^2 - tu + u^2$ .

Mais :  $t^2 - tu + u^2 = (t-u)^2 + tu \geq 0$  si  $t$  et  $u$  sont de même signe,

et :  $t^2 - tu + u^2 = (t+u)^2 - 3tu \geq 0$  si  $t$  et  $u$  sont de signes opposés.

Ainsi,  $\forall t, u \in \mathbf{R}$ ,  $t^2 - tu + u^2 \geq 0$ , donc  $\delta(x, y) \geq 0$  au voisinage de 0.

En conclusion :  $g$  admet en  $(1, 1)$  un minimum relatif, égal à  $-1$ .

#### Exercice 4 : Un système différentiel

**1)** Solutions constantes de  $(S)$  :

On suppose que  $x, y$  sont des fonctions constantes vérifiant  $(S)$ . On a alors  $x' = y' = 0$ , donc :  $\begin{cases} 0 = y^2 \\ 0 = \sin x \end{cases}$

Les couples de solutions constantes de  $(S)$  sont :  $\{(x : t \mapsto k\pi, y : t \mapsto 0), k \in \mathbf{Z}\}$ .

**2a)** Une condition vérifiée par des solutions de  $(S)$  :

Soit  $\Phi : t \mapsto V(x(t), y(t))$  avec  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ . On suppose que  $(x, y)$  est solution de  $(S)$ .

Alors  $\Phi$  est dérivable par opérations, et  $\Phi'(t) = x'(t) \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t))$ .

en remplaçant :  $\Phi'(t) = y^2(t) \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) + \sin(x(t)) \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t))$

La fonction  $\Phi$  est alors constante lorsque sa dérivée est nulle :  $y^2 \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + \sin(x) \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = 0$ .

**2b)**  $V(x, y) = \cos(x) + \frac{y^3}{3}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$ .

On a :  $\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = -\sin(x)$  et  $\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = y^2$ .

Donc  $y^2 \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + \sin(x) \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = y^2(-\sin(x)) + \sin(x)y^2 = 0$  donc  $V$  répond à la condition précédente.

**3)** Lien entre  $x$  et  $y$  avec condition initiale donnée :

On suppose que  $x_0$  et  $y_0$  forment un couple de solutions de  $(S)$ , tels que :  $\begin{cases} x_0(0) = 0 \\ y_0(0) = -\sqrt[3]{3} \end{cases}$

On sait alors que  $\Phi : t \mapsto V(x_0(t), y_0(t))$  est constante lorsque  $V(x, y) = \cos(x) + \frac{y^3}{3}$ .

On évalue cette constante en  $t = 0$  :  $\Phi(0) = V(0, -\sqrt[3]{3}) = \cos(0) + \frac{(-\sqrt[3]{3})^3}{3} = 1 - 1 = 0$ .

Donc :  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,  $\Phi(t) = 0$ , soit  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,  $\cos(x_0(t)) + \frac{(y_0(t))^3}{3} = 0$ .

On exprime alors  $y_0(t)$  en fonction de  $x_0(t)$  :  $\forall t \in \mathbf{R}, y_0(t) = \sqrt[3]{-3 \cos(x_0(t))}$ .