φ 9 : Description et paramétrage du mouvement d'un point

Mouvements et interactions

Plan

Documents

TD-φ09

Exercices

Capacités exigibles

Choisir le système de coordonnées adapté à la symétrie.
Utiliser les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération dans le cas des coordonnées cartésiennes ;

Ce cours est essentiellement un cours de mathématiques appliqué.

I Référentiel et repères

A) Référentiels

Définition 1 : Référentiels

On appelle **référentiel** ou « **solide de référence** » un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. L'observateur, lui-même fixe par rapport à ces points, fait partie du référentiel.

B) Espace

Définition 2 : Repère

Un repère d'espace est défini par une origine $\mathcal{O}$ qui est fixe dans le référentiel et des **axes de référence orthonormés** c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1) qui vont permettre à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve le point. Les trois axes forment un **trièdre direct**. L'étude du mouvement dans un plan nécessite 2 axes (Ox, Oy) et dans l'espace 3 axes (Ox, Oy, Oz).

C) Temps

Au référentiel, est associé un repère de temps permettant de connaître les dates des positions occupées par le point. On précise pour cela :

- un instant origine $(t = 0)$,
- une unité de temps,
- une orientation dans le sens des temps croissants.

> **Remarque**
> Le temps est absolu en mécanique classique, c'est-à-dire qu'il a la même valeur pour deux observateurs liés à des référentiels différents. Ce n'est pas le cas en mécanique relativiste.

II Repérage de vecteurs

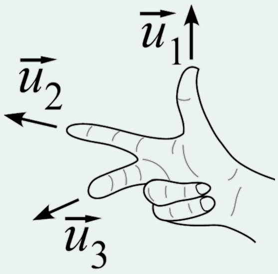
A) Base vectorielle

Il est nécessaire d'utiliser une base vectorielle afin de décomposer les vecteurs en différentes coordonnées. En physique, on travaille **toujours** sur une base orthonormée directe.

Définition 3 : Définition et propriétés d'une base vectorielle

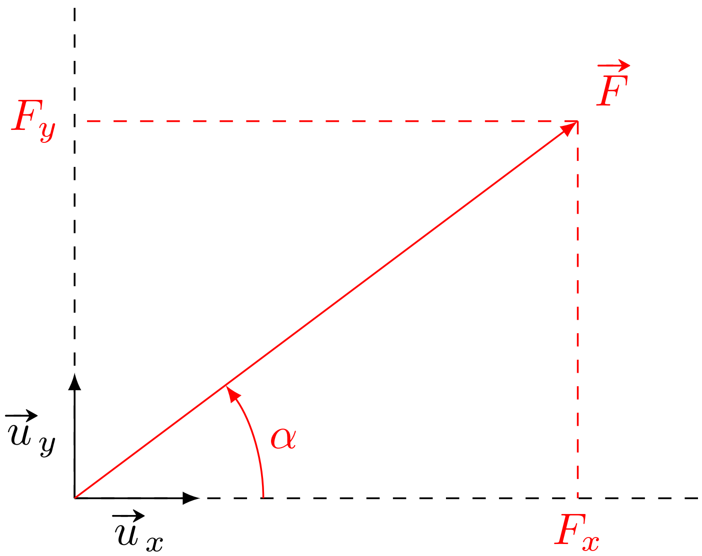
On décrit un vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, appelée base. On utilisera des **bases orthonormées directes** telles que :

-
-
-



B) Projection de vecteurs dans une base

Un vecteur peut toujours s'écrire dans une base orthonormée directe comme la combinaison linéaire des vecteurs colinéaires aux vecteurs de la base. On parle alorrs de **projection**. Il faut **absolument** savoir projeter un vecteur dans une base orthonormée comme sur le schéma suivant.



Remarque

Un bon moyen mnémotechnique consiste à se rappeler que F_x est lié au cos car c'est le côté adjacent et F_y au sin car c'est le côté opposé.

C) Le vecteur position

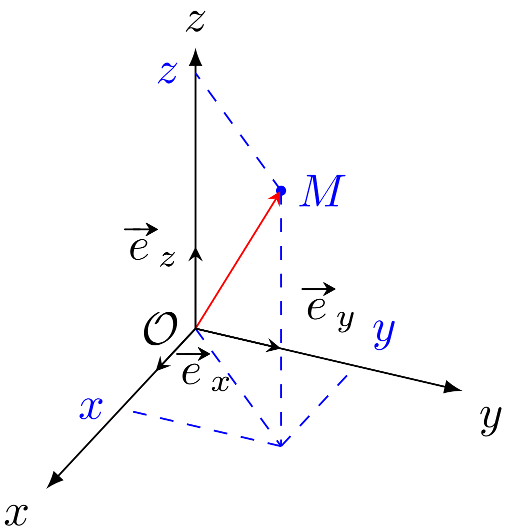
Définition 4 : Vecteur position

III Vecteur position et trajectoire : différents systèmes de coordonnées

A) Coordonnées cartésiennes

Définition 5 : Base cartésienne

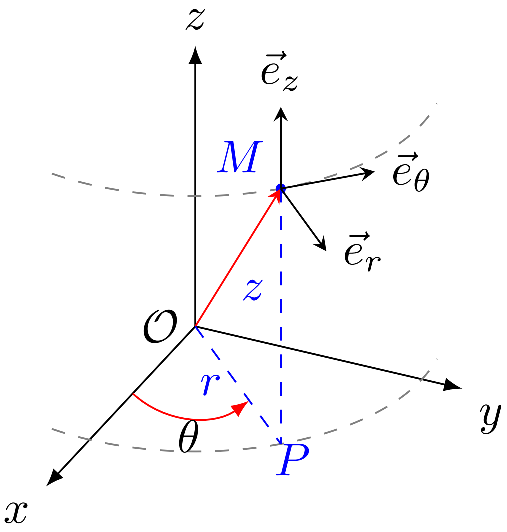
Attention : la dénomination $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est propre à ce cours. On retrouve parfois dans les énoncés d'exercices de variantes qui désignent le même système cartésien avec les notations : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ou $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.



La position de $M(x, y, z)$ est repérée par les trois variables :

- $x \in \mathbb{R}$: la coordonnée d'**abscisse** ;
- $y \in \mathbb{R}$: la coordonnée d'**ordonnée** ;
- $z \in \mathbb{R}$: la coordonnée **axiale** z correspond à l'**altitude** du point M.

B) Coordonnées cylindriques (pour information)



La position de $M(r, \theta, z)$ est repérée par les trois variables :

- $r \in \mathbb{R}^+$: la coordonnée **radiale** correspond à la distance de l'origine $\mathcal{O}$ du repère au point P projection orthogonale de M sur le plan (Oxy) ;
- $\theta \in [0, 2\pi]$: la coordonnée **orthoradiale** θ correspond à l'angle que fait $\overrightarrow{OP}$ avec l'axe $(\mathcal{O}x)$;
- $z \in \mathbb{R}$: la coordonnée **axiale** z correspond à l'altitude du point M.

C) Coordonnées sphériques

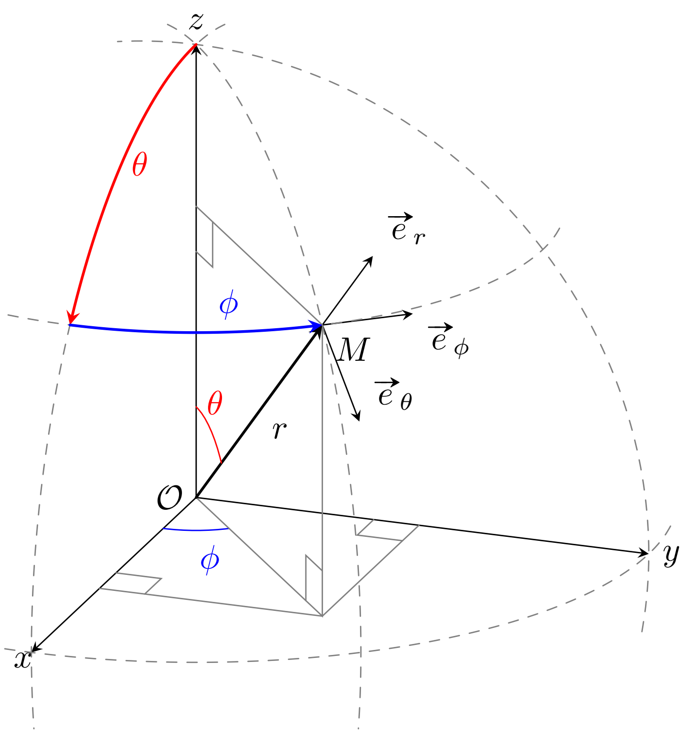


Figure 1 – Repérage du vecteur $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées sphériques

La position de $M(r, \theta, \phi)$ est repérée par les trois variables :

- $r \in \mathbb{R}^+$: la coordonnée **radiale** correspond à la distance de l'origine $\mathcal{O}$ du repère au point M ;
- $\theta \in [0, \pi]$: la coordonnée **angulaire** θ correspond à l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe (Oz). Cet angle est appelé **colatitude** (angle complémentaire de la latitude) ou **zénith** ;
- $\phi \in [0, 2\pi]$: la coordonnée **angulaire** ϕ correspond à l'angle que fait le plan défini par l'axe (Oz) et $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe (Ox). Cette angle est appelé la **longitude** ou l'**azimut**.

IV Dérivée vectorielle dans un référentiel donné

A) Rappels mathématiques

Définition 6 : Dérivées vectorielles

Pour une fonction $f(t)$, la dérivée de f par rapport au temps est :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{f(t+\mathrm{d}t) - f(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Pour un vecteur $\overrightarrow{A(t)}$, la dérivée vectorielle de $\vec{A}$ par rapport au temps est :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{\vec{A}(t+\mathrm{d}t) - \vec{A}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

Ainsi, **la dérivée d'un vecteur est un vecteur !**

Posons $\vec{A}(t)$, $\vec{B}(t)$ des vecteurs dépendant du temps, $f(t)$ une fonction scalaire (non vectorielle) du temps et α une constante.

Propriété 1 : Quelques dérivées vectorielles

Si $\vec{A}(t) = \overrightarrow{\text{constante}}$ alors $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$

$$\frac{\mathrm{d}(f(t)\cdot\vec{A}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{A}(t) + f(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{A}(t)+\vec{B}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t))}{\mathrm{d}t} = \vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} + \vec{B}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\alpha\cdot\vec{A}(t))}{\mathrm{d}t} = \alpha\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

B) Dérivée d'un vecteur dans la base cartésienne

Posons $\vec{A}(t)$ un vecteur dépendant du temps dont la décomposition dans la base cartésienne $(\mathcal{O}xyz)$ s'écrit $(A_x(t), A_y(t), A_z(t))$ ou encore :

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{e}_x + A_y(t)\vec{e}_y + A_z(t)\vec{e}_z \tag{3}$$

Ainsi :

Définition 7 : Notations des dérivées par rapport au temps

Les dérivées par rapport au temps ont une notation spéciale en physique :

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{A} \tag{4}$$

V Vecteur vitesse et vecteur accélération

A) Le vecteur déplacement élémentaire

Définition 8 : Le vecteur déplacement élémentaire d$\overrightarrow{OM}$

Remarque
Cette définition ne dépend pas du point fixe choisi pour origine.

B) Le vecteur vitesse

Définition

Définition 9

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t)$ du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ dont $\mathcal{O}$ est un point fixe est :

Remarque
Le vecteur vitesse dépend du référentiel.

Expression en base cartésienne

Soit le **vecteur déplacement** : $\overrightarrow{OM}(t) = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$
Alors, le **vecteur vitesse** s'écrit :

C) Le vecteur accélération

Définition

Définition 10 : Le vecteur accélération

Le vecteur accélération $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}(t)$ du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ dont $\mathcal{O}$ est un point fixe est :

Expression en base cartésienne

Soit le **vecteur vitesse** : $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$
Alors, le **vecteur accélération** s'écrit :

VI Études de mouvements rectilignes usuels

Définition 11 : Mouvement rectiligne

On appelle **mouvement rectiligne**, tout mouvement dont la trajectoire décrite est une droite.

A) Mouvement rectiligne uniforme

Repère choisi :

Conditions initiales :

Intégration :

B) Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Repère choisi :

Conditions initiales :

Intégration :

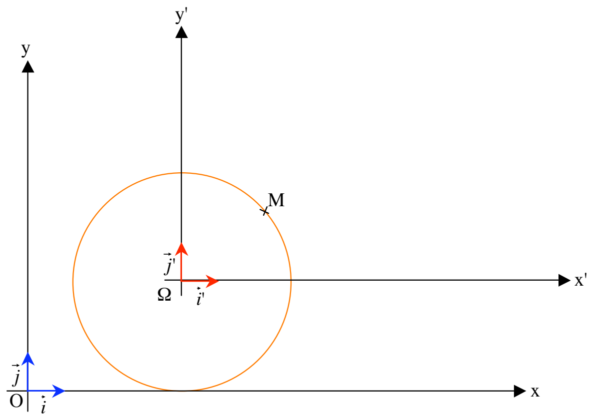
Remarque

Suivant le signe de a_0 le mouvement est une fonction croissante ou décroissante du temps.
Si $a_0 > 0$, le mouvement est uniformément accéléré ; si $a_0 < 0$ le mouvement est uniformément décéléré.

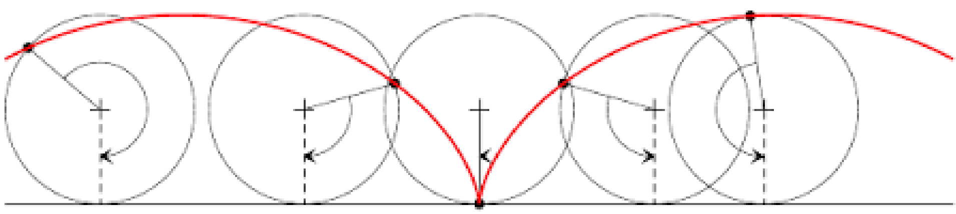
VII Changement de référentiel : loi de composition des vitesses

A) Mouvement relatif - Mouvement absolu

Soit une bicyclette roulant sans glisser à vitesse constante sur une route horizontale. Soit M un point de la roue de centre Ω. Dans le référentiel roue ($\mathcal{R}'$ de centre Ω et d'axes $\Omega x'$ et $\Omega y'$ de direction fixe), le mouvement de M est circulaire uniforme. Sa trajectoire est un cercle de centre Ω.



Dans le référentiel route ($\mathcal{R}$ de centre O et d'axes Ox et Oy de direction fixe), le mouvement de M est une cycloïde



Le mouvement de M ne se manifeste donc pas de la même façon selon le référentiel d'étude.
On pose arbitrairement $\mathcal{R}$ référentiel absolu dans lequel le mouvement de M sera qualifié de mouvement absolu. On a alors

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

Le mouvement dans $\mathcal{R}'$ (référentiel relatif) sera donc le mouvement relatif de M et on a

$$\overrightarrow{\Omega M} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'}$$

B) Mouvement d'entraînement

Le mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu définit le mouvement d'entraînement.
Attention : ce mouvement ne se réduit pas seulement à la description du mouvement de Ω dans $\mathcal{R}$, mais il faut tenir compte également de l'évolution des vecteurs de base $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$.

C) Référentiel relatif en translation par rapport au référentiel absolu

C.1 Translation

Définition 12 : Translation rectiligne

Remarque

En pratique on choisira $\vec{e}_x = \vec{e}_{x1}$: $\vec{e}_y = \vec{e}_{y1}$; $\vec{e}_z = \vec{e}_{z1}$.

En plus, si $\mathcal{O}_1$ a un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$ alors le référentiel $\mathcal{R}_1$ est en mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel absolu $\mathcal{R}$.

C.2 Loi de composition newtonienne des vitesses

Pour le point mobile $M(x_1, y_1, z_1)$ dans le référentiel mobile (ou relatif) $\mathcal{R}_1$ de centre $\mathcal{O}_1$. On peut écrire par la relation de Chasles

En dérivant par rapport à t dans le référentiel $\mathcal{R}$, on obtient :

Les vecteurs de base du référentiel $\mathcal{R}_1$ notés $\vec{e}_{x1}$, $\vec{e}_{y1}$, $\vec{e}_{z1}$ sont en translation rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$ donc :

Avec :

- La vitesse absolue du point M : $\vec{v_a} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$;
- La vitesse d'entraînement du point M : $\vec{v_e} = \vec{v}_{O_1/\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO_1}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$
- La vitesse relative du point M : $\vec{v_r} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1}$;