φ 10 : Dynamique du point

Mécanique

Plan

I **Notion de point matériel** **2**

II **Forces** **2**
Modélisation des actions par des vecteurs forces • Les interactions de contact • Les interactions à distance • Principe des actions réciproques (troisième loi de Nexton)

III **Les lois de Newton** **8**
Systèmes isolés • Première loi de Newton (principe d'inertie) • Quantité de mouvement d'un système • Principe d'inertie et conservation de la quantité de mouvement • Deuxième loi de Newton ou Énoncé du principe fondamental de la dynamique (PFD)

IV **Applications** **10**
Chute libre avec et sans frottements • Mouvement d'une charge dans un champ électrique • Utilisation du frottement coulombien • Oscillateur harmonique à une dimension non amorti

Documents

TD-φ09

Exercices

Capacités exigibles

Justifier qualitativement la position du centre de masse d'un système matériel, cette position étant donnée.
Utiliser la relation entre la quantité de mouvement d'un système matériel et la vitesse de son centre de masse.
Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
Discuter qualitativement du caractère galiléen d'un référentiel donné pour le mouvement étudié.
Établir un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte en représentant les forces associées sur une figure.
Utiliser la deuxième loi de Newton dans des situations variées.
Établir et exploiter les équations horaires du mouvement.
Établir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Déterminer et **résoudre** l'équation différentielle du mouvement.
Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement, par exemple : écriture sous forme adimensionnée, analyse en ordres de grandeur, existence d'une vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par résolution numérique, etc.
Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage.
Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.
Caractériser une déformation élastique linéaire par sa réversibilité et son amplitude proportionnelle à la force appliquée.
Extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de mesures expérimentales ou de données.
Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux.
Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement.
Déterminer les expressions de la pulsation et de la période propres du mouvement.

I Notion de point matériel

La dynamique correspond à l'étude du mouvement d'un corps en relation avec ses causes : les actions extérieures appliquées sur ce corps. **On se limitera à l'étude du mouvement d'un point matériel ou d'un solide assimilable à un point**.

Définition 1 : Modèle du point matériel

Un système peut être assimilé à un **point matériel** si :

Dans ce cas le système pourra être assimilé à un point (son **centre d'inertie**) sur lequel on concentre toute la masse du corps (et sa charge si le système est chargée).

Centre d'inertie Lorsqu'un solide est en mouvement, il existe un point particulier de ce solide, appelé **centre d'inertie** qui décrit un mouvement plus simple que les autres. C'est aussi le **centre de masse**.

II Forces

A) Modélisation des actions par des vecteurs forces

Définition 2 : Action mécanique et vecteur force

Une **action mécanique** est une action capable de provoquer ou de modifier le mouvement d'un corps. On la modélise par un **vecteur force**.
Un vecteur force possède trois caractéristiques mathématiques, plus une quatrième d'origine physique :

- sa **direction** (la droite qui le porte, appelée droite d'action),
- son **sens** (donnée par une orientation de la droite qui le porte),
- sa **valeur**, aussi appelée norme en mathématiques, elle s'exprime en newton dans le système international (N),
- son **point d'application** (point du système qui subit l'action extérieure ici le point matériel M).

> **Remarque**
> Deux vecteurs dont les trois premières caractéristiques sont identiques sont égaux mais deux vecteurs égaux peuvent avoir des points d'application différents

Les forces qu'un point matériel peut subir sont en fait en nombre limité. On distingue les forces suivantes :
- forces d'interaction à distance comme les forces de gravitation, les forces électromagnétiques, les forces nucléaires de cohésion ;
- forces de contact comme les forces de frottement et de tension.

B) Les interactions de contact

La tension d'un fil

Soit M le centre d'inertie d'une bille de masse m accrochée à l'extrémité d'un fil souple, inextensible, de masse négligeable. La liaison entre le fil et la masse se traduit par l'existence d'une force $\vec{T}$ de tension du fil qui impose une contrainte au mouvement de la masse (ici une trajectoire circulaire pour un pendule simple pesant).

Force de rappel d'un ressort

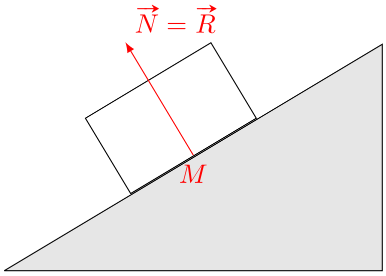
On considère un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k (en $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$), de longueur au repos ℓ_0 suivant un axe (Ox) horizontal.

Réactions du support

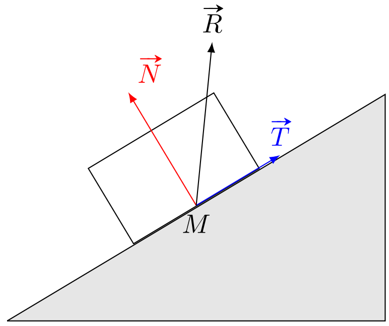
Réflexions sur différentes trajectoires :
Soit une particule M en chute libre alors sa trajectoire sera verticale.
Soit une particule M' qui se trouve sur un plan incliné d'angle α sa trajectoire sera la ligne de plus grande pente et non une trajectoire verticale.
Conclusion :

On admet que ces interactions réparties en surface sont modélisées par une force unique $\overrightarrow{R}$ s'appliquant en un point unique M de la surface (généralement le centre). On distingue deux contacts différents :

En l'absence de frottement :



En présence de frottement :



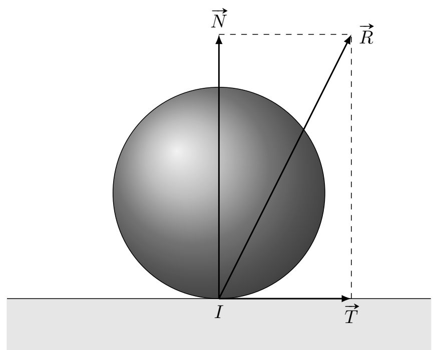
Propriété 1 : Conditions de contact

Paramétrisation de la force de contact

On considère le contact entre un objet M au point de contact I avec le plan de contact $\mathscr{P}$. On décompose la force de contact $\vec{R}$ en deux :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

où les deux composantes tangentielle $\vec{T}$ et normale $\vec{N}$ de la force de contact ont les propriétés suivantes :



Lois de Coulomb

Propriété 2 : Lois de Coulomb

La force de frottement solide $\vec{T}$ exercée sur le système par le milieu extérieur est liée à la force normale $\vec{N}$ par la loi de frottement de COULOMB :

Remarque

Les coefficients de frottement de glissement dépendent de la nature des matériaux et de l'état de rugosité des surfaces. Généralement, la valeur de f_d est proche de celle de f_s et on utilise l'approximation $f_d \approx f_s = f$.
S'il n'y pas de frottement, $f_s = f_d = 0$. La force de contact est alors réduite à $\vec{N}$ qui est perpendiculaire au support.

La poussée d'Archimède

Définition 3 : La poussée d'Archimède

En notant $\vec{g}$ le vecteur accélération de pensanteur (*vide infra*) vertical dirigé vers le bas, on exprime la **poussée d'Archimède** comme étant (Démonstration au chapitre $\varphi - 11$ de « Statique des fluides ») :

avec ρ la masse volumique du fluide déplacé ;
V le volume de fluide déplacé ;
$||\vec{g}|| = 9,81$ m·s^{-2}.

C) Les interactions à distance

Interaction fondamentale gravitationnelle de Newton

On appelle force de gravitation ou force d'interaction gravitationnelle, la force exercée par une masse m_1 sur une masse m_2. La loi d'attraction universelle s'exrpime analytiquement de la façon suivante :

Le poids

Considérons les deux points matériels suivants :

- la Terre dont la masse est M_T ;
- une bille dont la masse est m_b.

En considérant que la masse de la Terre se fait suivant une répartition sphérique, on montre que l'attraction terrestre globale est comparable à celle qu'exercerait un point matériel situé au centre d'inertie de la Terre et où serait concentrée toute la masse de celle-ci. L'action de la Terre sur la bille est appelée force de pesanteur et en considérant le référentiel terrestre comme galiléen, on a :

r étant la distance du centre d'inertie de la Terre à celui de la bille.

Si la bille se situe au voisinage du sol (surface de la Terre) alors r est une constante et on peut écrire le champ de pensanteur $\vec{g}$ comme étant :

Démontrons la faible variation du vecteur intensité de pesanteur :

Il est alors légitime de définir le poids par la formule :

Interaction fondamentale électrostatique coulombienne

L'interaction Coulombienne est l'analogue de l'interaction gravitationnelle pour des charges électriques ponctuelles. La force d'interaction d'une charge q_1 placée en M_1 sur une charge q_2 placée en M_2 s'écrit :

Il est possible de faire apparaître comme dans le cas de la pesanteur, un champ $\overrightarrow{E_1}$ créé par une charge ponctuelle q_1 située en M_1 en un point M quelconque. Ce champ appelé champ électrique s'écrit :

> **Remarque**
> Un corps à symétrie sphérique de charge se comporte vu de l'extérieur comme une charge ponctuelle située en son centre. Exemple : deux ions Na^+ (noyau : 11 protons et cortège électronique : 10 électrons) et Cl^- (17 protons et 18 électrons) s'attirent comme deux charges ponctuelles et $+e$ et $-e$.

Interaction avec un champ électrostatique

Comme pour l'interaction gravitationnelle on peut définir un champ électrique en tout point de l'espace aux alentours d'une ou de plusieurs charges.

D) Principe des actions réciproques (troisième loi de Nexton)

Propriété 3 : Actions réciproques

III Les lois de Newton

A) Systèmes isolés

On dit qu'un **système est isolé** s'il n'exerce ou ne subit aucune action, c'est à dire s'il n'est en interaction avec aucun autre système. En théorie, ce type de système n'existe pas car il faudrait imaginer un système absolument seul dans l'espace. En pratique, on peut se rapprocher de ce modèle en considérant un système très éloigné de tout autre système matériel. En effet, dans la nature, toutes les interactions ont comme propriété fondamentale de tendre vers zéro quand la distance entre les 2 systèmes en interaction tend vers l'infini.

Définition 4 : Systèmes isolés ou pseudo-isolés

B) Première loi de Newton (principe d'inertie)

Définition 5 : Première définition du principe d'inertie

Propriété 4 : Résultat

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

Remarque

Les trois référentiels à connaître (héliocentrique, géocentrique et terrestre) sont galiléens ou pseudo galiléens.

C) Quantité de mouvement d'un système

Un des postulats de la mécanique newtonienne consiste à considérer que la masse est invariante lors d'un changement de référentiel ; elle est donc indépendante de v et du référentiel d'étude[1].

Par contre, la notion de masse est indispensable pour caractériser l'inertie d'un corps : 2 corps ayant la même vitesse ne répondront pas de la même façon à une action mécanique extérieure, et c'est donc la masse de ces corps qui permet de traduire leur inertie. On définit alors une nouvelle grandeur : la **quantité de mouvement**.

Définition 6 : Quantité de mouvement d'un système ponctuel

Soit un système ponctuel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$, on définit sa quantité de mouvement $\vec{p}_{M/\mathcal{R}}$ comme étant :

1. Ce qui n'est pas le cas en mécanique relativiste.

Propriété 5 : Résultats importants pour la quantité de mouvement

- La quantité de mouvement dépend du référentiel, puisque la vitesse en dépend.
- La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle extensive, elle est donc additive : soit $\vec{p}_{\mathscr{S}_1/\mathcal{R}}$ et $\vec{p}_{\mathscr{S}_2/\mathcal{R}}$ la quantité de mouvement de deux sous-systèmes $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, alors la quantité de mouvement du système global $\mathscr{S} = \{\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2\}$ est :

$$\vec{p}_{\mathscr{S}/\mathcal{R}} = \vec{p}_{\mathscr{S}_1/\mathcal{R}} + \vec{p}_{\mathscr{S}_2/\mathcal{R}} \quad (1)$$

D) Principe d'inertie et conservation de la quantité de mouvement

Propriété 6 : Principe d'inertie : deuxième version

Dans un référentiel galiléen un système matériel isolé ou pseudo-isolé possède un vecteur quantité de mouvement constant :

$$\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{cste} \quad (2)$$

E) Deuxième loi de Newton ou Énoncé du principe fondamental de la dynamique (PFD)

Définition 7 : Principe fondamental de la dynamique

Pour un point matériel M de masse m, qui subit n forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext},i}$ alors si le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ est galiléen :

Remarque

- Le principe fondamental de la dynamique est une équation différentielle du second ordre :
  - — $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{\text{ext},i}$ est une fonction vectorielle du vecteur position $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{\text{ext},i} = f(\overrightarrow{OM})$:
  - — $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ est la dérivée seconde du vecteur position : $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$
- Le principe fondamental de la dynamique est une équation vectorielle qui est donc équivalente à autant d'équations scalaires que de dimensions d'espace dans le système d'étude. On peut donc remonter à autant d'inconnues que d'équations.

IV Applications

A) Chute libre avec et sans frottements

Chute libre dans le vide

Application du PFD

Équations horaires du mouvement

Caractéristiques du mouvement

Chute libre avec frottements proportionnels à la vitesse

Application du PFD

Analyse de l'équation différentielle

Point-méthode : Il est intéressant d'introduire les paramètres physiques que l'on a obtenus précédemment :

Équation adimensionnée

Résolution de l'équation différentielle

B) Mouvement d'une charge dans un champ électrique

Exercice 1

Soit une particule de masse m, portant une charge q dont on étudie le mouvement est placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$ uniforme vertical orienté vers le bas. La particule à $t = 0$ entre dans l'espace où règne le champ électrostatique avec un vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$ incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, les coordonnées du point M_0 dans le repère cartésien (x, y, z) sont $(0, \ell, h)$. Déterminer sa trajectoire.

C) Utilisation du frottement coulombien

Exercice 2 (Solution à la page ??)

Un objet M, de masse m, repose sur un plan (π) incliné d'un angle α, par rapport à l'horizontale. L'expérience montre que, si α croît lentement à partir d'une valeur nulle, l'objet reste en contact avec le plan (π) et immobile : on admet que ce plan exerce sur M une force égale et opposée à la direction vers laquelle M aura tendance ultérieurement à se déplacer. α croissant, on constate que pour une valeur critique α_d, l'objet se met en mouvement en glissant sur le plan.

1. Dénombrer les forces en présence dans le cas où $\alpha \leq \alpha_d$. En déduire la relation qu'elles vérifient pour que M reste immobile. Montrer qu'il existe une force de frottement maximum et donner son expression en fonction de α_d.
2. On se propose de faire glisser le corps vers le haut du plan (π) et, pour cela, on applique à M une force horizontale $\overrightarrow{F}_0$ constante. En supposant, en présence de mouvement, que la force de frottement puisse s'écrire $||\overrightarrow{f}|| = f_d||\overrightarrow{N}||$, f_d étant le coefficient de frottement dynamique (ou cinétique) et $||\overrightarrow{N}||$ la norme de la réaction normale de (π) sur M, en déduire la condition que doit vérifier $||\overrightarrow{F}_0||$ pour que la montée de M soit effectivement possible.
Données : $m = 50\,\text{kg}$, $\alpha = 30°$ et $f_d = 0,3$.

D) Oscillateur harmonique à une dimension non amorti

Définition

Soit un point matériel M soumis à une résultante des forces extérieures telle que $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$ avec $k > 0$. Cette force est donc centripète, on parle de force centrale.
On applique le PFD dans un référentiel galiléen, on obtient alors :

$$m\overrightarrow{a} = -k\overrightarrow{OM} = m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$$

Le mouvement est supposé unidirectionnel et on projette selon cette direction :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Définition 8 : Oscillateur harmonique non amorti

Méthode 1 : Résolution équation différentielle du second ordre

Pour résoudre une l'équation différentielle du second ordre à coefficient constant suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0$$

il faut :

1. écrire l'équation caractéristique qui en résulte, en remplaçant les termes par une constante r puissance l'ordre de la dérivée :
$$r^2 + \omega_0^2 = 0;$$
2. résoudre cette équation :
$$r^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow r = \pm j\omega_0$$
avec j tel que $j^2 = -1$;
3. on a alors
$$u(t) = \alpha \exp(j\omega_0 t) + \beta \exp(-j\omega_0 t)$$
qu'on écrit habituellement sous la forme :
$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \text{ ou } u(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Ici, la solution de l'équation différentielle précédente est de la forme

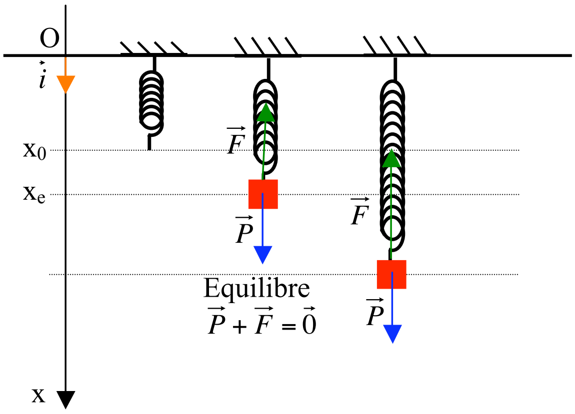
$$u = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où :

- A et φ sont 2 constantes d'intégration (équation différentielle du second ordre) déterminées grâce aux conditions (initiales) du problème physique.
- $A > 0$ est l'amplitude maximale du mouvement de pulsation ω_0. ω_0 traduit la nature de l'oscillateur.
- A ne dépend pas de la période des oscillations mais uniquement de la nature de l'oscillateur. On dit que les oscillations sont isochrones.
- T est la période des oscillations $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Exemple d'oscillateur harmonique mécanique : masse suspendue à un ressort

Il est nécessaire que l'élongation du ressort ne soit pas trop importante pour que la force de rappel reste effectivement toujours proportionnelle à l'allongement du ressort ($\overrightarrow{F} = -k(x - x_0)\overrightarrow{i}$ où x_0 représente la position du ressort à vide).



- hypothèses : champ de pesanteur uniforme $\vec{g_0}$; il n'y a pas de frottements ; on néglige la masse du ressort
- système étudié : point matériel de masse m ;
- référentiel d'étude : galiléen lié au sol ;
- forces appliquées au système :
  - son poids $\vec{P} = m\vec{g_0} = mg_0\,\vec{i}$;
  - la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(x - x_0)\,\vec{i}$.