



Devoir Surveillé n° 7

Problème I : Le refroidissement en thermodynamique

Au travers de deux sous-parties indépendantes, on s'intéresse à divers procédés de refroidissement. On rappelle, pour un gaz diatomique, les expressions des capacités thermiques molaires respectivement à volume et pression constante :

$$C_{V,m} = \frac{5}{2}R \text{ et } C_{P,m} = \frac{7}{2}R$$

avec $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$: constante des gaz parfaits.

1. Climatisation d'un local

Un cycle de BRAYTON inversé réalise un effet frigorifique. Lors de ce cycle, un gaz est comprimé, refroidi puis détendu. La température en fin de détente étant basse, ce gaz peut être utilisé pour refroidir une enceinte, soit par contact direct (notamment s'il s'agit d'air), soit par l'intermédiaire d'un échangeur.

Ce type de dispositif a été jusqu'à récemment très utilisé dans les avions pour assurer la climatisation des cabines en vol. Il est également utilisé pour climatiser les très grosses installations qui nécessitent de grandes quantités de fluide caloporteur.

Un cycle de Brayton inversé est formé de deux adiabatiques et de deux isobares. Il est supposé réversible et décrit par de l'air (assimilé à un gaz parfait diatomique). Dans cet exercice on considérera une mole d'air parcourant le cycle. On appelle γ le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants.

- 1 \rightarrow 2 : compression adiabatique réversible faisant passer le gaz de la pression P_1 à la pression $P_2 > P_1$. Une telle compression respecte la loi de LAPLACE qui stipule que $PV^\gamma = \text{constante}$;
 - 2 \rightarrow 3 : compression isobare ;
 - 3 \rightarrow 4 : détente adiabatique réversible redonnant la pression P_1 au gaz, toujours régie par la loi de LAPLACE ;
 - 4 \rightarrow 1 : dilatation isobare et retour au point 1.
- 1.1. Lors de la transformation 1 \rightarrow 2, que peut-on dire du volume V_2 par rapport au volume V_1 ? Justifier votre réponse.
 - 1.2. Tracer dans un diagramme de CLAPEYRON (ou diagramme P,V) le cycle de BRAYTON inversé. Justifier le fait qu'il soit adapté pour décrire un climatiseur.
 - 1.3. Justifier sans calcul lourd le fait que la transformation 2 \rightarrow 3 s'accompagne d'un refroidissement.
 - 1.4. Pour les quatre transformations du gaz envisagées, exprimer le transfert thermique associé, $Q_{1 \rightarrow 2}$, $Q_{2 \rightarrow 3}$, $Q_{3 \rightarrow 4}$ et $Q_{4 \rightarrow 1}$ en fonction de R (constante du gaz parfait) et des températures T_i ($i = 1, 2, 3$ ou 4) si nécessaires.
 - 1.5. Exprimer la variation d'énergie interne du gaz parfait sur le cycle. En déduire une expression du travail fourni sur le cycle en fonction des transferts thermiques des différentes transformations du cycle.
 - 1.6. On note η l'efficacité du climatiseur, définie comme étant le rapport entre le transfert thermique d'intérêt sur le coût énergétique de fonctionnement. Pour un climatiseur, le coût est égal au travail fourni sur le cycle (travail électrique fourni par branchement du climatiseur) et l'énergie utile (celle qui permet de refroidir la pièce) est le transfert thermique que le gaz reçoit de la source froide, c'est-à-dire $Q_{4 \rightarrow 1}$. Exprimer η en fonction des transferts thermiques des différentes transformations du cycle.
 - 1.7. Montrer que $T_1 = T_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(1-\gamma)/\gamma}$. En déduire l'expression de T_4 en fonction de T_3 , P_2 , P_1 et γ .
 - 1.8. On pose $a = \frac{P_2}{P_1}$, appelé rapport de compression du cycle. Exprimer η uniquement en fonction de a et de γ .

2. Utilisation des transitions de phase de l'eau

On met de l'eau chauffée à la température $T_1 = 300 \text{ K}$ dans une bouteille de volume V_0 , en ne remplissant la bouteille qu'au quart de sa capacité. La bouteille est ensuite fermée. On suppose que l'air enfermé avec l'eau dans la bouteille est parfaitement sec à l'instant initial et qu'il n'y aura pas de transfert thermique avec l'extérieur.

On donne :

- $P_{\text{sat}} = 70,0 \times 10^2 \text{ Pa}$, la pression de vapeur saturante de l'eau, supposée constante dans l'intervalle de température étudié ;
- $L_V = 3,00 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau ;
- $c_p = 4,20 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau liquide ;
- $M_{\text{eau}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ la masse molaire de l'eau ;
- $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique de l'eau liquide.

- 2.1. Qualitativement, que va-t-il se passer dans la bouteille ? Que peut-on prévoir quant à la température finale du système ?
- 2.2. Au vu de la valeur numérique de T_1 , que pouvez-vous dire de la quantité de matière de l'eau liquide qui va s'évaporer ? Que peut-on en déduire sur le volume de ce liquide restant à l'équilibre ?

On considèrera dans ce problème comme négligeables les capacités thermiques à pression constantes de l'eau vapeur et de l'air vis-à-vis de celle de l'eau liquide (on négligera donc leurs variations d'enthalpie). On admettra aussi que la transformation a lieu approximativement à P et V constants. On appelle $T_{\text{éq}}$ la température à l'équilibre.

- 2.3. Exprimer en fonction de V_0 , R , $T_{\text{éq}}$, P_{sat} et M_{eau} la masse d'eau qui a été vaporisée $m_{e,v}$, à l'équilibre.
- 2.4. À l'aide d'un bilan énergétique et en négligeant tout transfert thermique avec l'extérieur, en déduire une expression de la variation de température $\Delta T = T_{\text{éq}} - T_1$. L'évaluer numériquement en supposant que $\Delta T = T_{\text{éq}} - T_1 \ll T_1$.

Dans un laboratoire, pour obtenir un effet de refroidissement accru, on place dans un récipient aux parois athermanes (interdisant les transferts thermiques) une masse m_0 d'eau liquide, à la température T_0 . La vapeur formée est éliminée par une pompe qui l'aspire lentement.

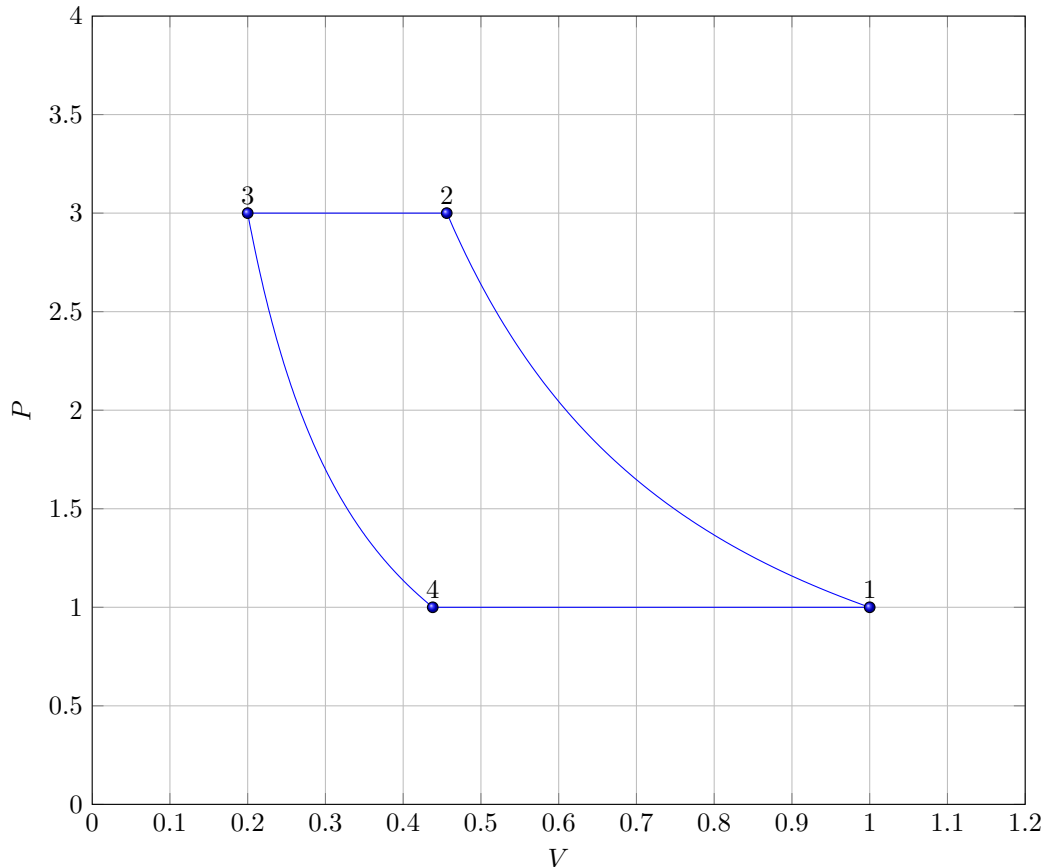
- 2.5. Expliquer qualitativement ce qui va se passer.
- 2.6. On cherche à évaluer les variations de masse de l'eau liquide, notée m . L'évaporation d'une masse dm d'eau provoque une variation de température dT à l'intérieur du récipient. En évaluant la variation d'enthalpie d'un système qu'on définira, écrire l'équation différentielle liant $m(T)$, dm et dT .
- 2.7. Pour le domaine de température considérée, L_V est une fonction affine de la température : $L_V = a - bT$, avec a et b des coefficients positifs. En déduire l'expression de la masse d'eau $m(T)$ présente à la température T .

Correction du Devoir Surveillé n° 7

Problème I : Le refroidissement en thermodynamique

1. Climatisation d'un local

- 1.1. D'après l'énoncé, $P_1 < P_2$. Or, d'après la loi de LAPLACE, $P_1 V_1^\gamma = P_2 v_2^\gamma \Leftrightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \frac{P_1}{P_2} < 1$. Avec $\gamma > 0$, on en déduit que $V_1 > V_2$.
- 1.2. Pour les adiabatiques réversibles, en considérant le gaz parfait, l'évolution est du type $PV^\gamma = cste$. Les isobares sont bien évidemment horizontales.



On constate que la compression a lieu à haute pression et la détente à plus basse pression. Il y a donc globalement un travail reçu au cours du cycle, le système est un récepteur et peut servir de climatiseur.

- 1.3. D'après l'équation des gaz parfaits $PV = nRT$, pour un système fermé, une diminution de volume à pression constante s'accompagne nécessairement d'une diminution de température.
- 1.4. Les transformations $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$ sont des adiabatiques, ainsi :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = Q_{3 \rightarrow 4} = 0$$

La transformation $2 \rightarrow 3$ est une isobare, le transfert thermique s'identifie donc à la variation d'enthalpie :

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta H_{2 \rightarrow 3} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} (T_3 - T_2)$$

De la même façon pour la transformation $4 \rightarrow 1$:

$$Q_{4 \rightarrow 1} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}(T_1 - T_4)$$

1.5. Par application du premier principe au gaz parfait sur un cycle $\Delta U = 0 = W + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{4 \rightarrow 1}$ ainsi

$$W = -Q_{2 \rightarrow 3} - Q_{4 \rightarrow 1}$$

1.6. On réécrit l'efficacité :

$$\eta = \frac{Q_{4 \rightarrow 1}}{W} = \frac{Q_{4 \rightarrow 1}}{-Q_{2 \rightarrow 3} - Q_{4 \rightarrow 1}} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_{2 \rightarrow 3}}{Q_{4 \rightarrow 1}}}$$

1.7. Pour relier les pressions aux températures, on utilise la loi de LAPLACE pour les adiabatiques réversibles d'un gaz parfait :

$$\begin{cases} P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \\ P_2^{1-\gamma} T_3^\gamma = P_1^{1-\gamma} T_4^\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = T_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} \\ T_4 = T_3 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} \end{cases}$$

1.8. On commence par utiliser les expressions des transferts thermiques en fonction des températures :

$$\eta = \frac{-1}{1 + \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_4}}$$

On reporte les expressions de T_1 et T_4 dans η :

$$\eta = \frac{-1}{1 + \frac{T_3 - T_2}{(T_2 - T_3)a^{(1-\gamma)/\gamma}}} = \frac{-1}{1 - a^{(\gamma-1)/\gamma}} = \boxed{\frac{1}{a^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}}$$

2. Utilisation des transitions de phase de l'eau

2.1. On va observer une évaporation partielle de l'eau liquide pour atteindre la pression de vapeur saturante. L'évaporation nécessitant de l'énergie, la température dans la bouteille va diminuer.

2.2. On peut penser qu'une faible quantité d'eau va s'évaporer et que les volumes des phases liquide et gazeuse vont être quasiment préservés.

2.3. La vapeur d'eau en équilibre avec le liquide est nécessairement à la pression de vapeur saturante et occupe un volume $V = \frac{3V_0}{4}$. Par application de l'équation d'état des gaz parfaits à l'eau sous forme de vapeur :

$$P_{\text{sat}} \times \frac{3V_0}{4} = \frac{m_{e,v}}{M_{\text{eau}}} RT_{\text{éq}} \Rightarrow \boxed{m_{e,v} = \frac{3P_{\text{sat}}V_0M_{\text{eau}}}{4RT_{\text{éq}}}}$$

2.4. Soit le système Σ : {eau(ℓ), eau(v) + air contenu dans la bouteille}. Ce système peut être considéré comme isolé (tout transfert thermique vers l'extérieur est négligé), on en déduit que la variation d'enthalpie de Σ est nulle.

L'énergie nécessaire pour évaporer une masse $m_{e,v}$ d'eau (énergie liée à l'enthalpie de changement d'état) vaut $\Delta H_v = m_{e,v}L_v$. Ce transfert thermique va être prélevée sur l'enthalpie de l'eau liquide (dont la masse est considérée constante car peu d'évaporation), ce qui correspond à l'enthalpie de refroidissement d'une phase condensée $\Delta H_\ell = m_{e,\ell}c_p(T_{\text{éq}} - T_1)$. On néglige les variations d'enthalpie de l'eau à l'état vapeur et de l'air. Ainsi :

$$\Delta H_\Sigma = 0 = m_{e,\ell}c_p(T_{\text{éq}} - T_1) + m_{e,v}L_v$$

$m_{e,\ell}$ désigne la masse d'eau liquide de volume $V_0/4$ c'est à dire $m_{e,\ell} = \rho \times V_0/4$ et donc :

$$\frac{\rho V_0}{4} c_p (T_{\text{éq}} - T_1) + m_{e,v} L_v = 0$$

En introduisant l'expression de $m_{e,v}$, on obtient :

$$\frac{\rho V_0 c_p \Delta T}{4} + \frac{3P_{\text{sat}} V_0 M_{\text{eau}}}{4RT_{\text{éq}}} L_v = 0$$

Comme $|\Delta T| \ll T_1$, on peut assimiler T_1 à $T_{\text{éq}}$, ainsi :

$$\Delta T = -\frac{3P_{\text{sat}}M_{\text{eau}}L_v}{RT_{\text{eq}}c_p\rho} \approx \boxed{-\frac{3P_{\text{sat}}M_{\text{eau}}L_v}{RT_1c_p\rho} \stackrel{\text{A.N.}}{=} -0,1 \text{ K}}$$

Ce qui confirme la très faible variation de température qui n'est pas mesurable dans la pratique.

- 2.5.** La vapeur d'eau formée est extraite par la pompe, pour maintenir l'équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur, l'eau s'évapore à nouveau et ainsi de suite.
- 2.6.** En supposant que l'enthalpie du système isolé se conserve :

$$\boxed{m(T)c_p dT - dmL_v = 0}$$

Le signe \ominus est nécessaire car dm représente la variation de masse d'eau liquide, alors que dans la question précédent, il s'agissait de la masse de vapeur formée.

- 2.7.** On remplace L_v par l'expression donnée par l'énoncé :

$$m(T)c_p dT - dm(a - bT) = 0$$

Par séparation des variables m et T :

$$c_p \frac{dT}{a - bT} = \frac{dm}{m}$$

Par intégration entre T_0 et T , on obtient :

$$-\frac{c_p}{b} \ln \left(\frac{a - bT}{a - bT_0} \right) = \ln \left(\frac{m(T)}{m_0} \right)$$

Finalement, la masse d'eau liquide s'écrit en fonction de la température :

$$\boxed{m(T) = m_0 \times \left(\frac{a - bT}{a - bT_0} \right)^{c_p/b}}$$