

Semaine n°2 du 25 septembre au 29 septembre

Logique et ensembles

- Proposition ou assertion : définition, exemples.
- opérateurs : NON, ET, OU, \Rightarrow , \Leftrightarrow .
- Négation du ET ou du OU :

$$\text{Non}(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow \text{Non}(P) \text{ ou } \text{Non}(Q)$$

$$\text{Non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \text{Non}(P) \text{ et } \text{Non}(Q)$$

- Distributivité :

$$(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \Leftrightarrow (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$$

$$(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \Leftrightarrow (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$$

- Ensembles : notations \emptyset , \in , \subset , \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} .
- Méthode de démonstration pour montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre, ou que deux ensembles sont égaux.
- Parties d'un ensemble, notation $\mathcal{P}(E)$.
- Opérations sur les ensembles : union et intersection (associative, commutative, distributivité), complémentaire, lois de De Morgan.
- Produit cartésien : définition.
- Quantificateurs : \forall , \exists , $\exists!$, négation des quantificateurs.
- Différents types de démonstration :
 - Raisonnement direct
 - Raisonnement par contraposée
 - Raisonnement par disjonction de cas
 - Raisonnement par l'absurde
 - Utilisation d'un contre exemple
 - Récurrence simple (le symbole Σ n'est pas maîtrisé), récurrence à deux pas, récurrence forte.

Nombres réels

- Définitions : intervalles de \mathbb{R} , segment, majorant, minorant, plus grand et plus petit élément, borne supérieure et borne inférieure d'une partie de \mathbb{R} .
- Valeur absolue d'un nombre réel : définition et propriétés ($|x| = \alpha$, $|x| \leq \alpha$, $|x| \geq \alpha$, $|xy|$, $|\frac{x}{y}|$, inégalités triangulaires)
- Partie entière d'un nombre réel : définition, opérations (Les puissances non entière n'ont pas été traitées.)
- Puissance entière et la racine carrée : définition, opérations.
- Identités remarquables : $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$.
- Résolution d'équations :
 - Règles de transformation pour obtenir une équation équivalente, cas de la composition par une fonction strictement monotone.
 - Equation produit.
 - Résolution dans \mathbb{R} d'équation du second degré.
 - Equations nécessitant la recherche d'un domaine de validité seulement avec la racine carrée. (Le logarithme n'est pas connu de tous.)
(cf exemple)

Remarques aux colleurs

- Veuillez à ce que les récurrences soit particulièrement bien rédigées (cf exemple en annexe).
- Les élèves ont des difficultés en calcul. Il ne faut pas hésiter pas à mettre en question de cours des simplifications de fractions ou de puissances.
- Merci d'être exigeant sur la rédaction des résolutions d'équations et inéquations (cf exemple en annexe)

Exemple de rédaction pour une récurrence

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, " $2^n > n$ ".

Pour $n \in \mathbb{N}$, note $\mathcal{R}(n)$ la propriété : " $2^n > n$ ".

Initialisation pour $n = 1$:

$2^1 = 2$ et on a bien $2 > 1$ donc $\mathcal{R}(1)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On suppose que $\mathcal{R}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $2^n > n$

Or $2^n > n \Leftrightarrow 2 \times 2^n > 2n \Leftrightarrow 2^{n+1} > n + n$

Or $n \geq 1$, on en déduit donc :

$2^{n+1} > n + 1$

On a montré que $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie

D'après le principe de récurrence (ou par récurrence), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > n$.

Exemple de rédaction pour une résolution d'équation

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $\sqrt{x+2} = x - 4$

Etude du domaine de validité de l'équation :

Soit $x \in \mathbb{R}$ L'équation est valide si et seulement si $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

On résout l'équation sur $[-2, +\infty[$.

Soit $x \in [-2, +\infty[$,

1er cas : Si $x \in [-2, 4[$,

alors $x - 4 < 0$.

Dans ce cas l'équation n'a pas de solution puisqu'une racine carrée est un nombre positif.

2eme cas : Si $x \in [4, +\infty[$,

$\sqrt{x+2} = x - 4 \Leftrightarrow x + 2 = (x - 4)^2$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+
avec $\sqrt{x+2} \in \mathbb{R}_+$ et $x - 4 \in \mathbb{R}_+$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 7$$

Seule la solution 7 est valide car $2 < 4$.

L'ensemble des solutions de l'équation est sont $\mathcal{S} = \{7\}$.