TD05 – Correction

Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice 1:

1. f_1 est la composée de la racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ et d'un polynôme défini sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$f_1 \text{ est définie en } x \Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto -2x+6 \text{ est définie en } x \\ -2x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \leq 3 \end{cases}.$$
Ainsi par composition $\boxed{\mathcal{D}_{f_1} =]-\infty, 3]}$
2. f_2 est un quotient.
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$f_2 \text{ est définie en } x \Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto 1 \text{ est définie en } x \\ x \mapsto x^2-6x+5 \text{ est définie en } x \\ x^2-6x+5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ polynômes} \\ (x-1)(x-5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 1 \text{ et } x \neq 5 \end{cases}$$
Ainsi par quotient $\boxed{\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{1,5\}}$
3. f_3 est un quotient.
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$f_3 \text{ est définie en } x \Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto 1 \text{ est définie en } x \\ x \mapsto \ln(x) \text{ est définie en } x \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R}_+^* \\ x \neq 1 \end{cases}$$
Ainsi par quotient $\boxed{\mathcal{D}_{f_3} =]0,1[\cup]1,+\infty[}$
4. f_4 est le produit de $x \mapsto x$ définie sur $\mathbb{R}$ et de $x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R}}$
5. f_5 est la somme de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R}}$
6. f_6 est la composée de la fonction logarithme définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'un polynôme défini sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$,
$$f_6 \text{ est définie en } t \Leftrightarrow \begin{cases} t \mapsto t^2+3t+2 \text{ est définie en } t \\ t^2+3t+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ (t+1)(t+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ t \in]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[\text{ (trinôme positif à l'extérieur des racines)} \end{cases}$$
Ainsi par composition $\boxed{\mathcal{D}_{f_6} =]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[}$
7. f_7 est un quotient.
Soit $u \in \mathbb{R}$,
$$f_7 \text{ est définie en } u \Leftrightarrow \begin{cases} u \mapsto u+4 \text{ est définie en } u \\ u \mapsto u^2-1 \text{ est définie en } u \\ u^2-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \in \mathbb{R} \text{ (polynômes)} \\ u^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \in \mathbb{R} \\ u \neq -1 \text{ et } u \neq 1 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{f_7} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$

8. f_8 est l'exponentielle de base 5.
   Elle est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$ et $f_8(x) = e^{x\ln(5)}$.
9. f_9 est la composée de la fonction puissance π définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (exposant réel non entier) et du polynôme $x \mapsto x + 5$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,
   $$f_9 \text{ est définie en } x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \mapsto x+4 \text{ est définie en } x \\ x+5 > 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ (polynôme)} \\ x > -5 \end{cases}$$
   Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{f_9} =]-5, +\infty[}$
10. f_{10} est un quotient.
   Soit $\theta \in \mathbb{R}$,
   $$f_{10} \text{ est définie en } \theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta \mapsto \tan(\theta) \text{ est définie en } \theta \\ \theta \mapsto \theta \text{ est définie en } \theta \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ \theta \in \mathbb{R} \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$
   Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{f_{10}} = \mathbb{R}^* \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$

Exercice 2:

Pour ne pas faire d'erreur sur la recherche des images d'intervalles, pensez à étudier les tableaux de variations ou tracer l'allure de la courbe.

1. $f_1(I) = [0, 4]$
2. $f_2(I) = [-8, 1[$
3. $f_3(I) = [-4, 5[$
4. $f_4(I) = [0, 4]$
5. $f_5(I) = \{-3, -2, -1\}$
6. $f_6(I) = [0, 1]$
7. $f_7(I) = [-1, \frac{-1}{4}[$
8. $f_8(I) = [\frac{-1}{4}, 6]$

Exercice 3:

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$
   $f_1(-x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)} = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = -(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = -f_1(x)$.
   La fonction f_1 est impair.
2. La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$
   $f_2(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{\mathrm{e}^{-2x}+1} = \frac{\mathrm{e}^{-2x}(1-\mathrm{e}^{2x})}{\mathrm{e}^{-2x}(1+\mathrm{e}^{2x})} = \frac{1-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = -\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = -f_2(x)$.
   La fonction f_2 est impair.
3. La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$
   $f_3(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-2x}(\mathrm{e}^{x}+1)^2} = f_3(x)$
   La fonction f_3 est pair.

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}$ On commence par revenir à la définition. On a $\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(n)}$.

Etudions les variation de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$.
Etudions le signe de la dérivée. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff 1 - \ln(x) \geq 0 \\ &\quad 1 \geq \ln(x) \\ &\quad x \leq \mathrm{e} \end{aligned}$$

La fonction f est croissante sur $]0;\mathrm{e}\,]$ et décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.
La fonction f admet un maximum en e.
La valeur maximal de $\sqrt[n]{n}$ est donc atteinte en $\lfloor \mathrm{e} \rfloor = 2$ ou en $\lfloor \mathrm{e} \rfloor + 1 = 3$.
Comme $\sqrt{2} \simeq 1,41$ et que $\sqrt[3]{3} = 1,44$, la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$ est $\sqrt[3]{3}$.

Exercice 5:

- On a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Factorisons par x au numérateur et au dénominateur.
  On a :
  $$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(5-\frac{3}{x})}{x(\frac{7}{x}-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{3}{x}}{\frac{7}{x}-1}$$
  Ainsi par quotient $\boxed{A = -5}$
- Le sinus n'admet pas de limite en $-\infty$. Procédons par encadrement.
  $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$,
  $$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{x^3} \geq \frac{\sin(x)}{x^3} \geq \frac{1}{x^3} \text{ car } x^3 < 0$$
  Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x^3} = 0$.
  D'après le théorème des gendarmes, on a $\boxed{B = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^3} = 0}$
- Il n'y a pas de forme indéterminée.
  $\lim\limits_{x\to0^-} x+1 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to0^-} x(x+1) = 0^-$.
  Ainsi Par quotient $\boxed{C = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x(x+1)} = -\infty}$
- On a au numérateur une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
  Factorisons par x au numérateur et au dénominateur.
  $$D = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(\frac{\ln(x)}{x}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\frac{\ln(x)}{x}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\ln(x)}{x}+1}$$
  Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.
  Ainsi par quotient $\boxed{D = 1}$
- $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ (résultat de cours)
  et $\lim\limits_{X\to0} e^X = 1$
  Donc par composition des limites :
  $\boxed{E = \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln(x)} = 1}$
- Le cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$. Procédons par encadrement :
  $$\forall x \in \mathbb{R}_+, -1 \leq \cos(e^x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{x^2+1} \leq \frac{\cos(e^x)}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \text{ car } x^2+1 > 0$$
  Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes $\boxed{F = 0}$
- On a une forme indéterminée du type $0 \times \infty$.
  Posons $X = \ln(x)$. On a $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x) = 0^+$ donc $\boxed{G = \lim\limits_{X\to0^+} X\ln(X) = 0}$ (résultat de cours)

- On a une forme indéterminée du type $\infty \times 0$.
  Posons $X = \sqrt{x}$.
  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $H = \lim\limits_{X\to+\infty} X^4 e^{-X}$.
  Ainsi $\boxed{H = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^4}{e^X} = 0 \text{ par croissance comparée}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leq \dfrac{1}{x} < \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor + 1$.
  On en déduit :
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leq \dfrac{1}{x}$
  Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} - 1 = +\infty$ donc par comparaison $\boxed{I = \lim\limits_{x\to 0^+} \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = +\infty}$
- On a une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
  Factorisons par x.
  $J = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x} - 3 + \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3 + \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$
  Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.
  Ainsi par somme et produit de limites on obtient $\boxed{J = -\infty}$
- $K = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x+1)\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-(x+1)\ln(x)}$
  Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -(x+1)\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$
  Donc par composition des limites $\boxed{K = 0}$

Exercice 6:

1. f_1 est le quotient de deux polynômes définis sur $\mathbb{R}$. Elle est donc définie si et seulement si son dénominateur de n'annule pas, c'est à dire $x \neq 2$. (voir exercice 4 exemple 7 pour la rédaction rigoureuse).
   Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$.
   On a :
   $\lim\limits_{x\to 2^-} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x^2}{2-x} = +\infty$
   et $\lim\limits_{x\to 2^+} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^2}{2-x} = -\infty$
   Ainsi $\boxed{\text{La courbe de } f_1 \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 2}$
   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x(\frac{2}{x} - 1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{\frac{2}{x} - 1} = -\infty$
   et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{x(\frac{2}{x} - 1)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{\frac{2}{x} - 1} = +\infty$
2. f_2 est le quotient d'une somme d'une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ (racine carrée) et d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ (inverse) avec la fonction identité.
   On a donc $\boxed{\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}_+^*}$.
   $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = -\infty$.
   $\boxed{\text{La courbe de } f_2 \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0}$
   et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x} - \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2} = 0$
3. f_3 est la composée de la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ et d'un polynôme définie sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f_3 \text{ est définie en } x \Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto x^2-4x+3 \text{ est définie en } x \\ x^2-4x+3 \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ (x-1)(x-3) \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in]-\infty,1] \cup [3,+\infty[\text{ (trinôme positif à l'extérieur des racines)} \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{f_3} =]-\infty,1] \cup [3,+\infty[}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2}\sqrt{(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = \lim\limits_{x\to+\infty} |x|\sqrt{(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = +\infty$. En $-\infty$: cette fois-ci $|x| = -x$ donc les résultats seront différents.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x\sqrt{(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = +\infty$.

4. Le domaine de définition de la fonction f_4 est le même que celui de la fonction f_3

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} - 1)$

   On utilise la quantité conjuguée et on obtient :

   $$\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} = \frac{-4}{2} = -2$$

   Ainsi $\boxed{\text{La courbe de } f_3 \text{ admet au voisinage de } +\infty \text{ une asymptote oblique d'équation } y = x-2}$

5. En $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} + x = \lim\limits_{x\to-\infty} x(1-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}})$

   On utilise la quantité conjuguée et on obtient :

   $$\lim_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim_{x\to-\infty} x\frac{\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4-\frac{3}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{4}{2} = 2$$

   Ainsi $\boxed{\text{La courbe de } f_3 \text{ admet au voisinage de } -\infty \text{ une asymptote oblique d'équation } y = -x+2}$

6. f_6 est la composée de la fonction logarithme définie sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction $x \mapsto 1+e^{3x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$,

   $$f_4 \text{ est définie en } x \Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto 1+e^{3x} \text{ est définie en } x \\ 1+e^{3x} > 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^{3x} \geq -1 \text{ toujours vrai car l'exponentielle est strictement positive} \end{cases}$$

   Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R}}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{3x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to\infty} \ln(X) = +\infty$

   Donc par composition des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$

7. Le domaine de définition de la fonction f_7 est le même que celui de la fonction f_6

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f_7(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{3x}) + \ln(e^{-3x}+1) - 3x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{-3x}+1) = 0$

   $\boxed{\text{La courbe de } f_6 \text{ admet au voisinage de } +\infty \text{ une asymptote oblique d'équation } y = 3x}$

8. f_8 est un quotient de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\mathcal{D}_{f_8} = \mathbb{R}}$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = -1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

   $\boxed{\text{La courbe de } f_8 \text{ admet au voisinage de } -\infty \text{ une asymptote horizontale d'équation } y = -1}$.

   Par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$.

   $\boxed{\text{La courbe de } f_8 \text{ admet au voisinage de } +\infty \text{ une asymptote horizontale d'équation } y = 1}$.

Exercice 7:

1. On obtient l'inégalité proposée en étudiant le sens de variations de la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x(1-x) = x - x^2$. On remarque que cette fonction est à valeurs positives sur cet intervalle et qu'elle présente un maximum en ... qui vaut ...
2. (a) La fonction est strictement décroissante sur $]-1,0]$ puis strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Cela découle immédiatement de la négativité de f sur son domaine de définition.
3. On démontre l'inégalité de droite en étudiant par exemple la fonction g d'expression $g(x) = \sin(x) - x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Pour l'inégalité de gauche (plus compliquée), on pose $h(x) = \sin(x) - \dfrac{2}{\pi}x$. On étudie le signe de cette fonction en dressant son tableau de variations. Pour étudier le signe de $h'(x)$, il faut dériver h', étudier le signe de $h''(x)$ et invoquer le théorème de la bijection pour dire que h' s'annule une unique fois sur l'intervalle d'étude en un certain α qu'on ne peut pas explicitement déterminer. La fonction h est alors croissante sur $[0,\alpha]$ et décroissante sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. Or $h(0) = 0$ et $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D'où le signe de $h(x)$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et l'inégalité.

Je me perfectionne !

Exercice 8:

Soit la fonction $f(x) = x - 1 + \ln(\dfrac{x-2}{x+2})$.

1. $x \mapsto x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   $g : x \mapsto \ln(\frac{x-2}{x+2})$ est la composée de la fonction logarithme définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction $x \mapsto \frac{x-2}{x+2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$,

   $$g \text{ est définie en } x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \mapsto \frac{x-2}{x+2} \text{ est définie en } x \\ \frac{x-2}{x+2} > 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\text{ (faire un tableau de signes)} \end{cases}$$

   Ainsi par composition g est définie sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

   Enfin par somme, $\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[}$
2. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ (donc $x = 2$ est l'équation d'une asymptote verticale)

   $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ (donc $x = -2$ est l'équation d'une asymptote verticale)

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
3. On observe que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\frac{x-2}{x+2}) = 0$,

   donc $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = x - 1 \text{ est une asymptote oblique à la courbe de } f \text{ en } +\infty}$

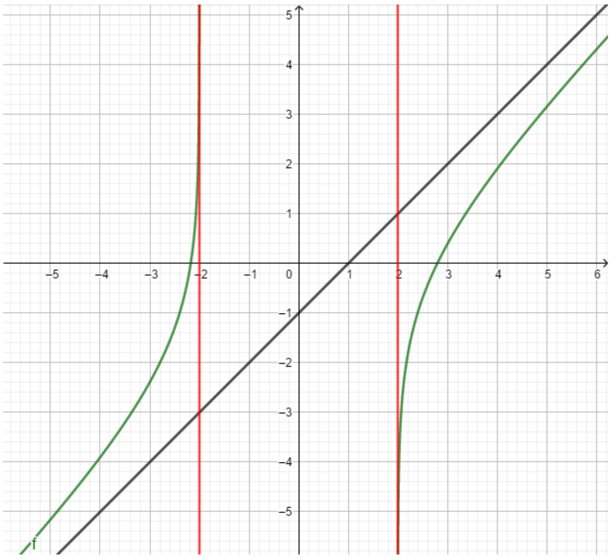
   Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ, on étudie le signe de $f(x) - (x-1)$, c'est à dire le signe de $\ln(\frac{x-2}{x+2})$.

   Cette expression est négative (puisque $\frac{x-2}{x+2} < 1$ au voisinage de $+\infty$) donc la courbe de f est située en dessous de son asymptote.
4. Comme précédement $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = x - 1 \text{ est une asymptote oblique à la courbe de } f \text{ en } -\infty}$

   Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ, on étudie le signe de $f(x) - (x-1)$, c'est à dire le signe de $\ln(\frac{x-2}{x+2})$.

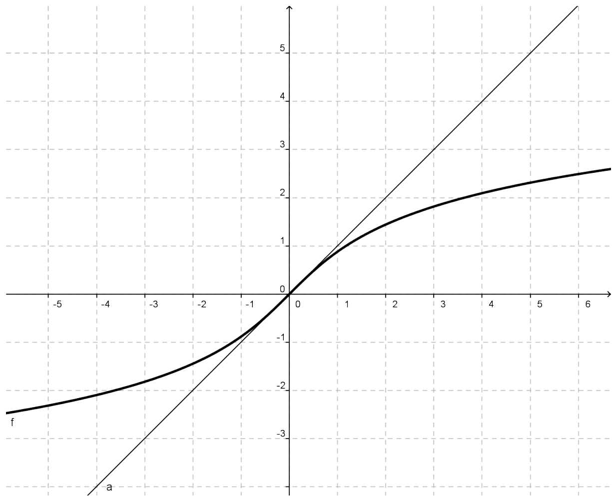
   Cette expression est positive (puisque $\frac{x-2}{x+2} > 1$ au voisinage de $-\infty$) donc la courbe de f est située au dessus de son asymptote.
5. f est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ et $f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2-4} = \frac{x^2}{x^2-4} > 0$

   Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty, -2[$ et sur $]2, +\infty[$.
6. On obtient :



Exercice 9:

1. $D_f = \mathbb{R}$ (conseil, partir de l'inégalité $x^2+1 > x^2$ et montrer que $x + \sqrt{x^2+1}$ est toujours strictement positif) :
   Soit $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} x^2+1 > x^2 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \text{ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} > x + |x| \end{aligned}$$
   et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq -x$ donc $|x| + x \geq 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
2. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire (penser à utiliser la quantité conjuguée) :
   soit $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = f(x) \end{aligned}$$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (fonction impaire)
4. On peut limiter l'étude à $\mathbb{R}_+$ en raison de l'imparité.
   f est dérivable sur ce domaine comme composée de fonctions dérivables.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$
   Ainsi la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (et donc aussi sur $\mathbb{R}$ par symétrie)
5. Tracer la courbe représentative de f.
   L'étude de la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ nous donne 0. La courbe admet donc au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.



Exercice 10:

1. En factorisant par x au numérateur et par $\sqrt{x}$ au dénominateur, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Il suffit de savoir calculer.....
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On cherche le signe de $f'(x)$.
   $f'(x)$ est du signe de $x + 4\sqrt{x} - 1$. On pose $X = \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$.
   On résout l'équation $X^2 + 4x - 1 = 0$.
   Le discriminant vaut 20.
   L'équation a deux solutions réelles $-2-\sqrt{5}$ et $-2+\sqrt{5}$.
   Comme $-2-\sqrt{5} < 0$, on trouve une seule solution positive $-2+\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff \sqrt{x} \geq -2+\sqrt{5} \\ &\iff x \geq (2-\sqrt{5})^2 \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

x	0		$(2-\sqrt{5})^2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 11:

1. f est la composées de deux logarithmes (défini sur $\mathbb{R}_+^*$).
   Soit $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} f \text{ est définie en } x &\Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto \ln(x) \text{ est définie en } x \\ \ln(x) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$
   Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]1, +\infty[}$
2. g est le quotient d'une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $x \mapsto e^x + e^{-x} - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in R$,
   $$\begin{aligned} g \text{ est définie en } x &\Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto 1 \text{ est définie en } x \\ x \mapsto e^x + e^{-x} - 2 \text{ est définie en } x \\ e^x + e^{-x} - 2 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x + e^{-x} - 2 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Résolvons l'équation $e^x + e^{-x} - 2 = 0$.

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} - 2 = 0 &\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 (\text{ le logarithme est strictement croissant sur } \mathbb{R}_+^*) \end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{g \text{ est définie pour } x \neq 0 \text{ donc sur } \mathbb{R}^*}$

3. h est la composée de la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ et de la fonction $x \mapsto \dfrac{x-1}{3-2x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h \text{ est définie en } x &\Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto \dfrac{x-1}{3-2x} \text{ est définie en } x \\ \dfrac{x-1}{3-2x} \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\} \\ x \in [1, \frac{3}{2}[\text{ (faire un tableau de signes)} \end{cases} \end{aligned}$$

   finalement $\boxed{\mathcal{D}_h = [1, \frac{3}{2}[}$

Exercice 12:

1. $X_0 \leq X_{max}$ donc $\frac{1}{X_0} - \frac{1}{X_{max}} \geq 0$
   De plus $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-rt} > 0$ et $\frac{1}{X_{max}} > 0$
   Ainsi la fonction étudiée est un quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ avec un dénominateur strictement positif donc $\boxed{\mathcal{D}_X = \mathbb{R}}$
2. $\star$ si $r > 0$ alors $\lim\limits_{t \in +\infty} e^{-rt} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{t \in +\infty} X(t) = X_{max}}$
   Ainsi, si le taux de croissance est positif, la population augmente jusqu'à atteindre la capacité maximale.
   $\star$ si $r < 0$ alors $\lim\limits_{t \in +\infty} e^{-rt} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{t \in +\infty} X(t) = X_0}$
   Ainsi, si le taux de croissance est négatif, la population diminue jusqu'à l'extinction.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS !

Exercice 13:

1. La fonction $x \mapsto -2x$ est définie sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.
   Etudions alors le domaine de définition de la composée $x \mapsto \ln(e^x - 1)$:
   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \mapsto \ln(e^x - 1) \text{ est définie en } x &\Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto e^x - 1 \text{ est définie en } x \\ e^x - 1 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

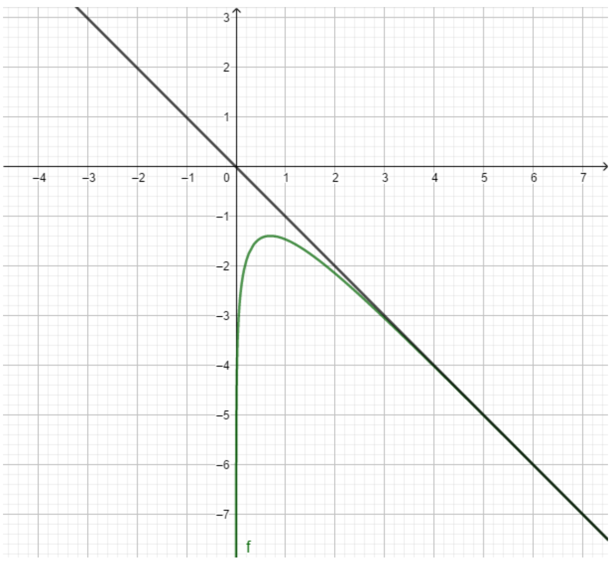
   Ainsi par composition la fonction $x \mapsto \ln(e^x - 1)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Enfin par somme, on a $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*}$
2. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$ d'après les limites des fonctions exponentielle et logarithme.
3. (a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \ln(e^x(1 - e^{-x})) - 2x = \ln(e^x) + \ln(1 - e^{-x}) - 2x = x + \ln(1 - e^{-x}) - 2x$.
   Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \ln(1 - e^{-x}) - x}$
   (b) On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$
4. On montrerait comme à la question 1) que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - 2 = \frac{2 - e^x}{e^x - 1}$
   On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
signe de $2-e^x$		$+$	0	$-$	
signe de e^x-1		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Puis le tableau de variations :

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
f'	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$-2\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

5. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ donc la doite d'équation $\boxed{x=0}$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.
   Par ailleurs,étudions le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-e^{-x})-x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-e^{-x})}{x} - 1 = -1$
   Etudions alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1-e^{-x}) = 0$
   Par conséquent la droite d'équation $\boxed{y=-x}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
6. On obtient la représentation graphique :



Exercice 14:

1. $\boldsymbol{f : x \longmapsto \ln(x^2-3x+2)}$
   f est la composée de la fonction logarithme définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'un polynôme défini sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,
   $$f \text{ est définie en } x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \mapsto x^2-3x+2 \text{ est définie en } x \\ 3x^2-3x+2>0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in]-\infty, 1[\cup]2,+\infty[\end{cases}$$
   En effet, le trinôme du second degré x^2-3x+2 admet pour racines 1 et 2 et son signe est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par composition, $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[}$.

On a

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty} \quad \text{et de même} \quad \boxed{\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty}$$

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right) = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right) = +\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ et de même $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

2. $\boldsymbol{g : x \longmapsto \sqrt{1-\ln(x)}}$

   g est la composée de la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction $x \mapsto 1-\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g \text{ est définie en } x \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \mapsto 1-\ln(x) \text{ est définie en } x \\ 1-\ln(x) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ 1 \geq \ln(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ x \leq e \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi par composition $\boxed{g \text{ est définie sur }]0, e]}$

   Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty}$$

   Et $\boxed{\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^-} g(x) = 0}$.

3. $\boldsymbol{h : x \longmapsto (x+1)^x}$ L'expression de h se réécrit : $h(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x+1)}$.

   h est la composée de la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $x \mapsto x\ln(x+1)$ définie sur $]-1, +\infty[$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h \text{ est définie en } x \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ x \mapsto x\ln(x+1) \text{ est définie en } x \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \mapsto x \text{ est définie en } x \\ x \mapsto \ln(x+1) \text{ est définie en } x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x+1 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ x \in]-1, +\infty[\right. \end{aligned}$$

   Donc par composition, $\boxed{\mathcal{D}_h =]-1, +\infty[}$.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x+1) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty}$ De plus, $\lim\limits_{x\to-1^+} \ln(x+1) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} x\ln(x+1) = +\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^+} h(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty}$

4. $\boldsymbol{k : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1-\mathrm{e}^{x^2}}}$

   k est le quotient de la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $x \mapsto 1-e^{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$k \text{ est définie en } x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \mapsto \cos(x) \text{ est définie en } x \\ x \mapsto 1 - e^{x^2} \text{ est définie en } x \\ 1 - e^{x^2} \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^{x^2} \neq 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Par quotient $\boxed{\mathcal{D}_k = \mathbb{R}^*}$.

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} (1 - \mathrm{e}^{x^2}) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos(x) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} k(x) = -\infty}$. De même, $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 - \mathrm{e}^{x^2}) = 0^-$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} k(x) = -\infty}$. On cherche maintenant la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. Comme $x^2 > 0$, on a $1 - \mathrm{e}^{x^2} < 0$ et donc $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{x^2}} \leqslant k(x) \leqslant \dfrac{-1}{1-\mathrm{e}^{x^2}}$.

Or $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (1-\mathrm{e}^{x^2}) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\pm 1}{1-\mathrm{e}^{x^2}} = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x) = 0}$.

5. $\boldsymbol{\ell : x \longmapsto \sqrt{x^2+4x+3} - \sqrt{x^2+1}}$

Notons $l_1 : x \mapsto \sqrt{x^2+4x+3}$ et $l_2 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

l_1 est la composée de la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ et d'un polynôme défini sur $\mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}$,

$$l_1 \text{ est définie en } x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \mapsto x^2+4x+3 \text{ est définie en } x \\ x^2+4x+3 \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ (x+1)(x+3) \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[\end{cases}$$

Par composition $x \mapsto \sqrt{x^2+4x+3}$ est définie sur $]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$.

En raisonnant de la même façon on obtient que l_2 est définie sur $\mathbb{R}$.

Finalement par somme, $\boxed{\mathcal{D}_\ell =]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[}$.

On a $\boxed{\lim\limits_{x\to -3^-} \ell(x) = -\sqrt{10}}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to -1^+} \ell(x) = -\sqrt{2}}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_\ell$, on a

$$\begin{aligned}
\ell(x) &= \left(\sqrt{x^2+4x+3} - \sqrt{x^2+1}\right) \times \frac{\sqrt{x^2+4x+3} + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+4x+3} + \sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+4x+3} + \sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{4x+2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} \\
&= \frac{4x+2}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} + |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{x\left(4+\frac{2}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}
\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right) = 2$ et comme $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \ell(x) = -2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \ell(x) = 2}$$

Exercice 15:

1. (a) ⋆ On cherche le domaine de validité $\mathcal{D}$ de l'inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D} \iff 3x-5 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{5}{3}$$

Donc $\mathcal{D} = \left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$.

⋆ Soit $x \in \mathcal{D}$. Comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $x-1 \in \mathbb{R}_+$ (puisque $x \geqslant \frac{5}{3} \geqslant 1$) et $\sqrt{3x-5} \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} x-1 \geqslant \sqrt{3x-5} &\iff (x-1)^2 \geqslant 3x-5 \\ &\iff x^2-2x+1 \geqslant 3x-5 \\ &\iff x^2-5x+6 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Le trinôme x^2-5x+6 a un discriminant égal à 1 et ses racines sont 2 et 3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2-5x+6 \geqslant 0$ est donc $]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est $\boxed{\mathcal{D} \cap \big(]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[\big) = \left[\frac{5}{3}, 2\right] \cup [3, +\infty[}$ puisque $\frac{5}{3} < 2$.

(b) Notons $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \left\{\begin{array}{c} 3x-5 \geqslant 0 \\ x-1-\sqrt{3x-5} \geqslant 0 \end{array}\right. \iff x \in \left[\frac{5}{3}, 2\right] \cup [3, +\infty[$$

d'après la question 1.(a). Finalement, $\boxed{\mathcal{D}_f = \left[\frac{5}{3}, 2\right] \cup [3, +\infty[}$.

(c) On n'oublie pas la commande `float` puisqu'on demande un nombre à l'utilisateur :

```
x=float(input("Donnez un nombre réel."))
if (5/3<=x<=2 or x>=3) :
      print("valeur correcte")
else :
      print("valeur incorrecte")
```

Remarque. Dans la boucle `if`, on pouvait aussi proposer :

```
if (3*x-5>=0 and x-1-sqrt(3*x-5)>=0) :
```

mais il ne faut pas oublier d'importer le module math (avec la commande `from math import *`).

2. (a) Pour tout $x \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$, on a :

$$f(x) = \sqrt{x-1-\sqrt{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}} = \sqrt{x-1-\sqrt{x} \times \sqrt{3-\frac{5}{x}}} = \sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}} \times \sqrt{3-\frac{5}{x}}\right)}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

(b) La fonction $x \longmapsto 3x-5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, la fonction $x \longmapsto \sqrt{3x-5}$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $3x-5 > 0$. Cette fonction est donc dérivable sur $\left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$. Par somme, la fonction $x \longmapsto x-1-\sqrt{3x-5}$ est dérivable sur $\left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$ tandis que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par

composition, la fonction f est dérivable en tout nombre $x \in \left]\dfrac{3}{5}, +\infty\right[$ tel que $x-1-\sqrt{3x-5}>0$.
En reprenant la résolution de l'inéquation de la question 1.(a), on trouve donc que :

$$\boxed{\text{le domaine de dérivabilité de } f \text{ est } \left]\frac{5}{3}, 2\right[\cup]3, +\infty[}$$

De plus, pour tout $x \in \left]\dfrac{5}{3}, 2\right[\cup]3, +\infty[$, on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{1-\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}}{2\sqrt{x-1-\sqrt{3x-5}}} = \frac{2\sqrt{3x-5}-3}{4\sqrt{3x-5}\sqrt{x-1-\sqrt{3x-5}}}}$$

(c) Soit $x \in \left]\dfrac{5}{3}, 2\right[\cup]3, +\infty[$. Comme $4\sqrt{3x-5}\sqrt{x-1-\sqrt{3x-5}}>0$, on a :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff 2\sqrt{3x-5}-3 \geqslant 0 \iff \sqrt{3x-5} \geqslant \frac{3}{2} \iff 3x-5 \geqslant \frac{9}{4}$$

car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et car $\sqrt{3x-5} \in \mathbb{R}_+$ et $\dfrac{9}{4} \in \mathbb{R}_+$. Donc :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff 3x \geqslant \frac{29}{4} \iff x \geqslant \frac{29}{12}$$

Comme $2 < \dfrac{29}{12} < 3$, la fonction f est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{5}{3}, 2\right]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$. D'où le tableau de variations de f :

x	$\frac{5}{3}$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	
f	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 16:

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car la fonctions cosinus l'est et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4-\cos(x) \neq 0$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.
   Ainsi le domaine de définition est $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, et $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{4-\cos(-x)} = \frac{\cos(x)}{4-\cos(x)} = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+2\pi \in \mathbb{R}$, $x-2\pi \in \mathbb{R}$, et $f(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{4-\cos(x+2\pi)}$. Or le cosinus est une fonctions 2π périodiques d'où :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \frac{\cos(x)}{4-\cos(x)} = f(x)$. Donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi \text{ périodique}}$
   Ainsi il suffit d'étudier cette fonction sur un intervalle de longueur 2π par exemple $[-\pi, \pi]$.
   Comme par ailleurs la fonction est impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine,
   $\boxed{\text{il suffit donc de l'étudier sur } [0, \pi] \text{ et de compléter par symétrie}}$
4. $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
   On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = \frac{-\sin(x)(4-\cos(x))-\cos(x)\sin(x)}{(4-\cos(x))^2} = \frac{-4\sin(x)}{(4-\cos(x))^2}}$
5. Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) \geq 0$ donc la fonction f est décroissante sur $[0, \pi]$.
6. Comme f est paire, on déduit du tableau de variations que sa valeur maximale sur $[-\pi, \pi]$ est $\boxed{f(0) = \frac{1}{3}}$
   et sa valeur minimale $\boxed{f(\pi) = -\frac{1}{5}}$
   Comme f est 2π périodique, ce sont les mêmes valeurs sur $\mathbb{R}$.