

TD06 – Correction

Exercice 1:

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x} - 3x^4$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 12x^3$$

2. $f : x \mapsto \frac{2x^3 - x}{\ln x}$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0; 1\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0; 1\}, f'(x) = \frac{(6x^3 - x) \ln(x) - 2x^3 + x}{x(\ln(x))^2}$$

3. $f : x \mapsto \frac{x^2 - \sqrt{x}}{e^x}$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - x^2 + \sqrt{x}}{e^x}$$

4. $f : x \mapsto e^{x^2} \ln x$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 2xe^{x^2} \ln x + \frac{e^{x^2}}{x}.$$

5. $f : x \mapsto x \ln(x) - x$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \ln(x).$$

6. $f : x \mapsto \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{2x(1 - \ln(x^2 + 1))}{(x^2 + 1)^2}$$

7. $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

8. $f : x \mapsto (x - 1)(2 - e^{-x})$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 + xe^{-x}$$

9. $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Exercice 2:

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ comme quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. On a de plus, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$$f'(x) = \frac{5}{(x + 2)^2}.$$

2. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynômiale) et : $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = -30(1 - 5t)^5$.

3. $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$ et h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynômiale) et : $\forall u \in \mathbb{R}, h'(u) = 5u^4 + 8u^3 - 3u^2 - 2u - 2$.

4. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) et : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, g'(y) = 8y + 6\sqrt{y} + 1$.

5. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 2\cos(2t)$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$, h est définie en $x \iff \begin{cases} x \mapsto x^2 + 1 \text{ est définie en } x \\ x^2 + 1 \in \mathbb{R}_+^* \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$.
- Comme $1 + x^2 > 0$, h est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Par composition la fonction h est dérivable en $x \in \mathbb{R}$, si $x^2 + 1 > 0$. Ce qui est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
7. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composée de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$) et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$.
8. $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}_+$ et φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(t) = \frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$. Pour montrer que la fonction n'est pas dérivable en 0, étudier la limite du taux d'accroissement en 0 et utiliser le fait que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Attention à bien avoir la même expression dans le sinus et au dénominateur pour appliquer cette formule !
9. $\mathcal{D}_\Psi = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ et Ψ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ comme quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. On a de plus, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $\Psi'(x) = \frac{-6}{(2x+1)^4}$.
10. La fonction Φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = 3^x = e^{x \ln(3)}$ et par conséquent Φ est une composée de fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a de plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) = \ln(3)3^x$.

Exercice 3:

1. ★ Soit $x \in \mathbb{R}$,
- f est définie en $x \iff \begin{cases} x \mapsto 2x^2 - 3x + 1 \text{ est définie en } x \\ 2x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$, car la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$. Après l'étude du signe de $2x^2 - 3x + 1$, on trouve que $\mathcal{D}_f = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$.

★ Soit $x \in \mathbb{R}$,

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynômiale)

Par composition la fonction f est dérivable en $x \in \mathbb{R}$, si $2x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{R}_+^*$. Donc si $2x^2 - 3x + 1 > 0$.

En utilisant l'étude de signe faite pour l'ensemble de définition on conclut que f est dérivable sur $\mathcal{D}_d = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$ et

$$\forall x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[, f'(x) = \frac{4x - 3}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}$$

2. ★ $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ car la fonction g est une composée de fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- ★ La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction $x \mapsto 4x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Donc par composition la fonction g est dérivable en $x \in \mathbb{R}$, si $4x^2 - 1 \neq 0$. C'est à dire si $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -\frac{1}{2}$.

On trouve que g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \\ 4x^2 - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$,

$$g'(x) = \begin{cases} -8x & \text{si } x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\\ 8x & \text{si } x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[\end{cases}$$

3. ★ Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$h \text{ est définie en } t \iff \begin{cases} t \mapsto \frac{1-t}{1+t} \text{ est définie en } x \\ \frac{1-t}{1+t} \in \mathbb{R}_+ \end{cases}, \text{ car la fonction racine est définie sur } \mathbb{R}_+.$$

En étudiant le signe du quotient $\frac{1-t}{1+t}$, on trouve que $\mathcal{D}_h =]-1, 1]$

★ La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1-t}{t+1}$ est le quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur s'annule en -1 . Donc cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Soit $t \in \mathcal{D}_h$. Par composition la fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{t+1}}$ est dérivable en t si $\frac{1-t}{t+1} > 0$. C'est à dire, en reprenant l'étude de signe faite, si $t \in]-1, 1[$.

Finalement, par produit h est dérivable sur $] -1, 1[$

De plus,

$$\forall t \in]-1, 1[, h'(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \times \frac{1-t-t^2}{1-t^2}$$

4. ★ Soit $u \in \mathbb{R}$,

$$\varphi \text{ est définie en } u \iff \begin{cases} u \mapsto \ln(u) \text{ est définie en } u \\ \ln(u) \in \mathbb{R} \end{cases}. \text{ La fonction } \varphi \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.$$

★ La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

La fonction $u \mapsto \ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$. Par composition φ est dérivable en u si $\ln(u) \neq 0$, c'est à dire si $u \neq 1$.

Donc la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

De plus, $\forall u \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\varphi'(u) = \begin{cases} -\frac{1}{u} & \text{si } u \in]0, 1[\\ \frac{1}{u} & \text{si } u \in]1, +\infty[\end{cases}$$

5. La fonction h est une composée de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a donc h est dérivable sur $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = -12 \sin(3x+1) \cos(3x+1)^3$$

6. On a $f(x) = e^{x \ln(x)}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = (\ln(x) + 1)x^x$$

7. On trouve que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (comme quotient de fonction définie et dérivable dont le dénominateur ne s'annule pas) et

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, g'(u) = \frac{-20}{(2u+1)^2} \times \left(\frac{3+u}{2u+1}\right)^3$$

Exercice 4:

1. La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions sinus et carré sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Par somme la fonction $x \mapsto x^2 + 3 \sin(x) + 2\sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \left(2x + 3 \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) e^{x^2+3 \sin(x)+2\sqrt{x}}$

2. $f : x \mapsto (\cos(x) + 3 \sin(x))^8$

Les fonctions $x \mapsto x^8$, cosinus et sinus sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 8(-\sin(x) + 3 \cos(x))(\cos(x) + 3 \sin(x))^7$.

3. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)$

La fonction logarithme est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

La fonction $x \mapsto \frac{x+2}{x+3}$ est le quotient de deux polynômes dont le dénominateur s'annule en -3 . Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par composition la fonction f est définie en x si et seulement si $\frac{x+2}{x+3} > 0$ et dérivable en x si $\frac{x+2}{x+3} > 0$.

Or $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ et $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$. En s'aidant d'un tableau de signe si besoin :

$\frac{x+2}{x+3} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$.

Donc la fonction f est définie et dérivable sur $] -\infty, -3[\cup] -2, +\infty[$ et pour tout $x \in] -\infty, -3[\cup] -2, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+3)^2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{(x+3)(x+2)}$$

4. La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les fonctions polynôme sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc par composition $x \mapsto e^{x^2-1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement par produit f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{x^2-1} + 2x(2x-1)e^{x^2-1} = 2(2x^2 - x + 1)e^{x^2-1}$.

5. La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$. Donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

La fonction $x \mapsto x^2 + 3x + 2$ est un polynôme et est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par composition la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ est définie en x si et seulement si $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ et dérivable en x si $x^2 + 3x + 2 > 0$.

La fonction $x \mapsto x^2 + 3x + 2$ est un polynôme du second degré. Ses racines sont -1 et -2 . Le coefficient devant x^2 est positif donc $x^2 + 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[$.

Donc la fonction f est définie sur $] -\infty, -2] \cup [-1, +\infty[$ et dérivable sur $] -\infty, -2[\cup] -1, +\infty[$.

Pour tout $x \in] -\infty, -2[\cup] -1, +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + e^{\frac{1}{x}} \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$

6. $f : x \mapsto (x+1)\ln(\sqrt{2x+1})$

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

La fonction $x \mapsto 2x + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par composition la fonction $x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est définie en x si et seulement si $2x+1 \geq 0$ et dérivable en x si $2x+1 > 0$.

Donc $x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est définie sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et dérivable sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$.

La fonction logarithme est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, par composition la fonction $x \mapsto \ln(\sqrt{2x+1})$ est définie en x si et seulement si $\sqrt{2x+1} > 0$ et dérivable si $\sqrt{2x+1} > 0$.

Or $\sqrt{2x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$. En effet la racine carrée d'un nombre est positive et $\sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Donc la fonction $x \mapsto \ln(\sqrt{2x+1})$ est définie et dérivable sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$.

Par produit la fonction f est définie et dérivable sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$.

Donc pour tout $x \in] -\frac{1}{2}, +\infty[$:

$$f'(x) = \ln(\sqrt{2x+1}) + (x+1) \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \ln(\sqrt{2x+1}) + \frac{x+1}{2x+1}$$

Exercice 5:

a : $x \mapsto x^3 \cos(x+1)$

a est définie sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \cos(x+1)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. a est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$a'(x) = 3x^2 \cos(x+1) - x^3 \sin(x+1)$$

b : $x \mapsto e^{\cos(x)}$

b est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. b est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$b'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$$

c : $x \mapsto x \ln(x)$

c est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. c est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$c'(x) = \ln(x) + 1$$

d : $x \mapsto \ln(e^x + 1)$

La fonction $x \mapsto e^x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. d est donc définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. d est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$d'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

e : $x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$

e est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. d est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e'(x) = (3x^2 + 4x + 3)e^{x^3+2x^2+3x+4}$$

f : $x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

La fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{(2x + 1) e^{\sqrt{x^2+x+1}}}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

g : $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$. h est alors définie sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. h est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h'(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

h : $x \mapsto \frac{\cos(2x)}{x^2-2}$

La fonction $x \mapsto x^2 - 2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. i est alors définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. La fonction $x \mapsto x^2 - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. i est alors dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ comme quotient de fonctions dérivables et

En particulier, pour $x \in]\sqrt{2}, +\infty[$, on a

$$i'(x) = -\frac{(2x^2 - 4) \sin(x) + 2x \cos(2x)}{(x^2 - 2)^2}$$

i : $x \mapsto \ln(\cos(2x))$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto \cos(2x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$. On sait que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x)$ est strictement positif si et seulement si x est dans un intervalle de la forme $]\alpha\pi - \frac{\pi}{4}, \alpha\pi\frac{\pi}{4}[$ avec k un entier relatif. Ainsi j est définie sur $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}}]\alpha\pi - \frac{\pi}{4}, \alpha\pi\frac{\pi}{4}[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto \cos(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. j est alors dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition comme composée de fonction dérivables.

En particulier, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a

$$j'(x) = \frac{-2 \sin(2x)}{\cos(2x)}$$

j : $x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$

La fonction $x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule sur $\pi\mathbb{Z}$. k est alors définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ comme quotient de fonctions dérivables.

En particulier, pour $x \in]0, \pi[$, on a

$$k'(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin(x)^2}$$

k : $x \mapsto \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$

La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais ne prend des valeurs positives que sur $] - \infty, 1] \cup [1, +\infty[$. Ainsi la fonction $x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $] - \infty, 1] \cup [1, +\infty[$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $] - \infty, 1] \cup [1, +\infty[$. Cette fonction ne prend toutefois des valeurs strictement positives que sur $[1, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.

Alors la fonction l est définie sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composition de fonctions dérivables.

Pour $x \in]1, +\infty[$, on a

$$l'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

l : $x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Elle est positive sur $] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Ainsi la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est définie sur $] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. La fonction m est alors définie sur $] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

En particulier, pour $x \in]1, +\infty[$, on a

$$m'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

m : $x \mapsto \ln(\ln(x))$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle prend des valeurs strictement positives sur $]1, +\infty[$. n est alors définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

Pour $x \in]1, +\infty[$, on a

$$n'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

n : $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$

La fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$, elle prend des valeurs strictement positives sur $]e, +\infty[$. La fonction o est alors définie et dérivable sur $]e, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

Pour $x \in]e, +\infty[$, on a

$$o'(x) = \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}$$

o : $x \mapsto \ln(1 + \exp(-\frac{1}{x}))$

La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. Ainsi la fonction $x \mapsto 1 + \exp(-\frac{1}{x})$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. Elle prend des valeurs toujours strictement positives. Donc p est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.

En particulier, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$p'(x) = \frac{1}{x^2 (1 + \exp(\frac{1}{x}))}$$

p : $x \mapsto \frac{e^x}{x}$

La fonction $x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle ne s'annule qu'en 0. Ainsi q est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.

En particulier, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$q'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

q : $x \mapsto \cos(x) (1 + \tan(x) \tan(\frac{x}{2}))$

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \alpha\pi, \alpha \in \mathbb{Z}\}$ et est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \alpha\pi, \alpha \in \mathbb{Z}\}$. La fonction $x \mapsto \tan(\frac{x}{2})$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\beta\pi, \beta \in \mathbb{Z}\}$ et est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\beta\pi, \beta \in \mathbb{Z}\}$.

Ainsi r est définie sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \alpha\pi, \alpha \in \mathbb{Z}) \cup \{\pi + 2\beta\pi, \beta \in \mathbb{Z}\}$ et est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition comme produit de fonctions dérivables.

En particulier, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$r'(x) = 0$$

En effet, si on effectue des simplifications trigonométriques, on peut se rendre compte que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \alpha\pi, \alpha \in \mathbb{Z}) \cup \{\pi + 2\beta\pi, \beta \in \mathbb{Z}\}$, $r(x) = 1$

r : $x \mapsto \sqrt{(x^x)^{2x+1}}$

La fonction $x \mapsto x^x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x^x = e^{x \ln(x)}$. Elle prend des valeurs strictement positives et elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on peut réécrire $(x^x)^{2x+1} = \exp((2x+1) \ln(e^{x \ln(x)})) = \exp((2x^2 + x) \ln(x))$. La fonction $x \mapsto \exp((2x^2 + x) \ln(x))$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et prend des valeurs strictement positives. De plus la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi s est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$s'(x) = \frac{(x^x)^{2x+1} ((2x+1) (\ln(x) + 1) + 2 \cdot x \cdot \ln(x))}{2\sqrt{(x^x)^{2x+1}}}$$

Exercice 6:

1. f est une fonction polynômes, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 12x$.

On étudie le signe de la dérivée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6x^2 - 12x = x(6x - 12)$$

Donc la dérivée est une fonction polynôme de degré 2 qui a pour racine 0 et 2. Le coefficient devant x^2 étant positif, f' est négative sur $[0, 2]$ est positive sur $\mathbb{R} \setminus [0, 2]$. Donc

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	+	0	0	+
f				

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$. Elle est strictement décroissante sur $[0, 2]$.

2. f est une fonction polynômes, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -40x^4 - 16x^3$.
On étudie le signe de la dérivée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -40x^4 - 16x^3 = -8x^3(5x + 2)$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	0	$+\infty$
$-8x^3$	+	+	0	−
$5x + 2$	−	0	+	+
f'	−	0	+	−
f	$\swarrow \quad \quad \quad \searrow$ $-\frac{9439}{3125} \quad \quad \quad -3$			

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{2}{5}]$ et $[0, +\infty[$. Elle est strictement croissante sur $[-\frac{2}{5}, 0]$. On pourra remarquer que $-\frac{9439}{3125} \approx -3.02048$. La croissance sur $[-\frac{2}{5}, 0]$ est très faible.

3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} + \frac{7}{x^8}$$

On étudie le signe de la dérivée. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{9}{x^4} + \frac{7}{x^8} = \frac{-9x^8 + 7x^4}{x^{12}} = \frac{-x^4(9x^4 - 7)}{x^{12}} = \frac{-x^4(3x^2 - \sqrt{7})(3x^2 + \sqrt{7})}{x^{10}} \\ &= \frac{-x^4(\sqrt{3}x - \sqrt{\sqrt{7}})(\sqrt{3}x + \sqrt{\sqrt{7}})(3x^2 + \sqrt{7})}{x^{12}} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^{12} > 0$ et $3x^2 + \sqrt{7} > 0$. Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de l'expression $-x^4(\sqrt{3}x - \sqrt{\sqrt{7}})(\sqrt{3}x + \sqrt{\sqrt{7}})$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{\sqrt{7}}/\sqrt{3}$	0	$\sqrt{\sqrt{7}}/\sqrt{3}$	$+\infty$
$-x^4$	−	−		−	−
$\sqrt{3}x - \sqrt{\sqrt{7}}$	−	−		0	+
$\sqrt{3}x + \sqrt{\sqrt{7}}$	−	0	+	+	+
f'	−	0	+	+	−
f	$\swarrow \quad \quad \quad \searrow$ $f\left(-\frac{\sqrt{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}}\right) \quad \quad \quad$			$\swarrow \quad \quad \quad \searrow$ $f\left(\frac{\sqrt{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}}\right) \quad \quad \quad$	

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{\sqrt{7}}/\sqrt{3}]$ et sur $]0, \sqrt{\sqrt{7}}/\sqrt{3}]$. Elle est strictement décroissante sur $[-\sqrt{\sqrt{7}}/\sqrt{3}, 0[$ et sur $[\sqrt{\sqrt{7}}/\sqrt{3}, +\infty[$.

Notons que la fonction est impaire et admet l'origine pour centre de symétrie (ce qui est cohérent avec le tableau de variation).

4. La fonction f est le quotient deux fonctions polynomiales dont le dénominateur s'annule en 0 et -3 . Donc la fonction f est définie et dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$

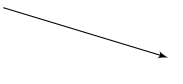
Pour tout $x \in D_f$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \times \frac{2(x-1)x(x+3) - (x-1)^2(2x+3)}{(x^2+3x)^2} \\ &= -2 \times \frac{(x-1)(2x^2+6x-2x^2-x+3)}{(x^2+3x)^2} \\ &= -2 \times \frac{(x-1)(5x+3)}{(x^2+3x)^2} \\ &= -2 \times \frac{5x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = -2 \times \frac{(x-1)(5x+3)}{(x^2+3x)^2}$$

Le dénominateur de f' est positif. Le signe de f' est donc le même que celui de son numérateur qui est un polynôme du second degré défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $p(x) = -2(x-1)(5x+3)$. Donc :

x	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{5}$	0	1	$+\infty$
f'	—		—	0	+	—
f				$\frac{32}{9}$		

La fonction f est strictement croissante sur $[-\frac{3}{5}, 0[$ et sur $]0, 1]$. Elle est strictement décroissante sur $] -\infty, -3[$, $] -3, -\frac{3}{5}]$ et $[1, +\infty[$.

5. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$. Le numérateur est dérivable sur $D =]0, +\infty[$. Le dénominateur est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est un quotient de fonctions dérivables sur D donc est dérivable sur D . Pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+3) - 2\sqrt{x}}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{-2x+3}{2\sqrt{x}(2x+3)^2} \end{aligned}$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$f'(x) = \frac{-2x+3}{2\sqrt{x}(2x+3)^2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\sqrt{x} > 0$, $(2x+3)^2 > 0$, $-2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$. On conclut que pour tout $x \in]0, \frac{3}{2}]$, $f'(x) > 0$ et $f'(\frac{3}{2}) = 0$. Donc f est strictement décroissante sur $[0, \frac{3}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

Exercice 7:

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$. On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \cos(2x+y) - 2x^2y \sin(2x+y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \cos(2x+y) - x^2y \sin(2x+y)$$

2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^2$. On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2xy + e^y \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x^2 + xe^y + 1$$

Exercice 8:

1. On a $g(x, y) = e^{y \ln(x)}$ donc le domaine de définition de g est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \ln(x)x^y$$

2. On a $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1 - 3r^2}{2\sqrt{r}(1 + r^2)^2} \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = -\frac{\sqrt{r}}{1 + r^2} \sin(\theta)$$

3. On a $\mathcal{D}_k = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; st > 0\} = (\mathbb{R}_+)^2 \cup (\mathbb{R}_-)^2$. De plus,

$$\frac{\partial k}{\partial s}(s, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{s}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial k}{\partial t}(s, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{t}}$$

Exercice 9:

1. La fonction T est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (somme de fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$). On a $\forall v \in \mathbb{R}_+^*$,

$$T'(v) = (0, 3965T_C - 11, 37) \times 0,16v^{0,84}.$$

2. La fonction Y est un quotient de 2 fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Le dénominateur ne s'annule pas. La fonction Y est définie est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$,

$$Y'(p) = \frac{2,8p^{1,8}(K + p^{2,8}) - 2,8p^{1,8}p^{2,8}}{(K + p^{2,8})^2} = \frac{2,8Kp^{1,8}}{(K + p^{2,8})^2}.$$

Exercice 10:

1. La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie si et seulement si $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est définie et $\lfloor x \rfloor \neq 0$.

Or la fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$ et $\lfloor x \rfloor \neq 0 \Leftrightarrow x \notin [0, 1[$.

Ainsi par composition, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus [0, 1[=]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

2. (a) La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

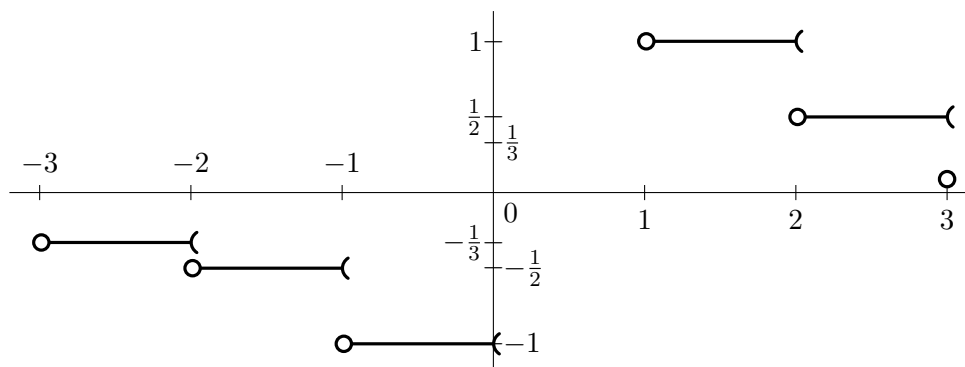
La fonction partie entière est dérivable sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$

D'autre part $\lfloor x \rfloor \neq 0 \Leftrightarrow x \notin [0, 1[$.

Ainsi par composition, la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*}]n, n+1[$.

- (b) On a $\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \mathbb{Z}, \quad f'(x) = -\frac{0}{\lfloor x \rfloor^2} = 0$ car la fonction partie entière est de dérivée nulle en tout point où elle est dérivable.

3. **Graphes de la fonction f :**

**Exercice 11:**

Partie A : étude des limites de f

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 f \text{ est définie en } x &\iff \begin{cases} x \mapsto e^{-x} \text{ est définie en } x \\ x \mapsto \ln(1 + e^x) \text{ est définie en } x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{car exponentielle est définie sur } \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + e^x \text{ est définie en } x \\ 1 + e^x \in \mathbb{R}_+^* & \text{car le logarithme est définie sur } \mathbb{R} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{car exponentielle est définie sur } \mathbb{R} \\ 1 + e^x \in \mathbb{R}_+^* & \text{toujours vraie car exponentielle est à valeurs positive} \end{cases} \\
 &\iff x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

L'ensemble de définition de f est : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En factorisant par e^x à l'intérieur du logarithme, il vient :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{-x} \ln(e^x(e^{-x} + 1)) - \frac{1}{2} = e^{-x} \left(\underbrace{\ln(e^x)}_{=x} + \ln(1 + e^{-x}) \right) - \frac{1}{2} \\
 &= x e^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

et comme $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, on obtient le résultat souhaité : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{2}$

(b) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées).

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 + y) = \ln(1) = 0$. D'après le théorème concernant la limite d'une fonction composée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) = 0 \times 0 = 0$.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$. Or, quand x tend vers $-\infty$, $h = e^x$ tend vers 0. En utilisant le théorème concernant la limite d'une fonction composée, on a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

d'après le rappel de l'énoncé. Finalement, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

4. Conséquences graphiques :

la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes horizontales, la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ en $+\infty$.

Partie B : étude des variations de f et construction de $\mathcal{C}$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 g \text{ est définie en } t &\iff \begin{cases} t \mapsto \frac{t}{1+t} \text{ est définie en } t \\ t \mapsto \ln(1 + t) \text{ est définie en } t \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} t \neq -1 \\ 1 + t > 0 & \text{car le logarithme est définie sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases} \\
 &\iff x \in]-1 ; +\infty[
 \end{aligned}$$

Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g =]-1, +\infty[$.

2. (a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour démontrer que g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée.

Pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$g'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = -\frac{t}{(1+t)^2}$$

Ainsi, $g'(0) = 0$ et pour tout $t > 0$, on a $g'(t) < 0$. On en conclut donc bien que :

la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$

- (b) La fonction g étant strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, on sait en particulier que pour tout $t > 0$, $g(t) < g(0)$ et donc $g(t) < 0$ (puisque $g(0) = 0$). Ainsi,

$$\forall t > 0, \quad g(t) < 0$$

3. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables et pour tout nombre réel x , on a

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) + e^{-x} \frac{e^x}{1 + e^x} = e^{-x} \left(\underbrace{\frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^{-x})}_{=g(e^x)} \right)$$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{-x} g(e^x)$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^x \in]0, +\infty[$, on a $g(e^x) < 0$ (car la fonction g est strictement négative sur l'intervalle $]0, +\infty[$ d'après la question 2. (b)). De plus, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) = e^{-x} g(e^x) < 0$. Il s'ensuit donc que

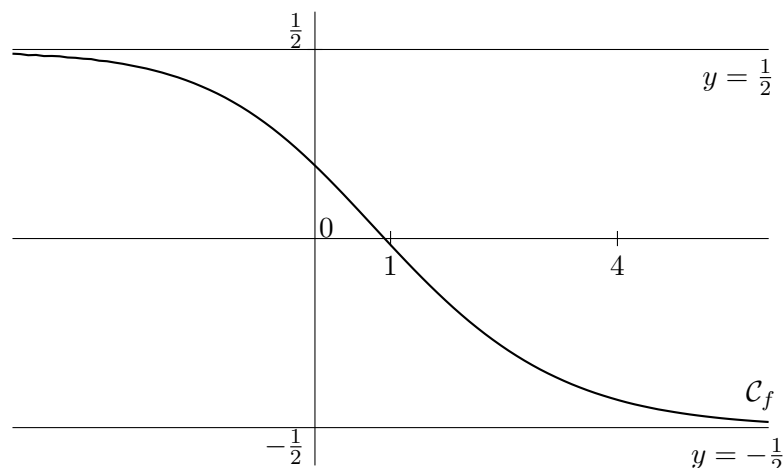
la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

En reprenant les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$ obtenues aux questions 2. (b) et 3. de la **Partie A**, on obtient le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

- (c) La fonction f est continue strictement décroissante de $] -\infty ; +\infty[$ à valeur dans $] -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$. Comme $0 \in] -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$, d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

4. **Graphes C de la fonction f** (pour gagner de la place, l'unité graphique n'est pas respectée dans le corrigé) :



Exercice 12:

1. (a) Les polynômes sont définis, continus et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, par composition, f est définie et continue en tout nombre réel x vérifiant $x(x+2) \geq 0$. On reconnaît un trinôme du second degré de racines 0 et -2 qui est donc positif à l'extérieur des racines. Ainsi

$\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$ et f est continue sur ce domaine. Par ailleurs, f est dérivable en tout nombre réel x vérifiant $x(x+2) > 0$. Donc f est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

- (b) Soit $x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$. Alors

$$f(x) = 0 \iff x+1 - \sqrt{x(x+2)} = 0 \iff \sqrt{x(x+2)} = x+1$$

Cette équation n'a donc des solutions que pour $x+1 \geq 0$, c'est à dire sur $[-1, +\infty[\cap \mathcal{D}_f = [0, +\infty[$. Sur cet intervalle, les deux membres sont positifs d'où

$$f(x) = 0 \iff x(x+2) = (x+1)^2 \iff 0 = 1$$

Ceci est absurde donc l'équation n'admet aucune solution sur $\mathcal{D}_f$.

- (c) D'après la question précédente, f , étant continue sur $]-\infty, -2]$ et sur $[0, +\infty[$, est de signe constant sur $]-\infty, -2]$ et sur $[0, +\infty[$. Or $f(0) = 1 > 0$ et $f(-2) = -1 < 0$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, -2], f(x) < 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) > 0$.
2. (a) La fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est définie en tout nombre réel x tel que $x+1 - \sqrt{x(x+2)} > 0$ soit $f(x) > 0$. Ainsi $\mathcal{D}_g = [0, +\infty[$.
- (b) D'après la question 1., f est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$. Ainsi par composition, g est dérivable sur $\mathcal{D}_g \cap (]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[)$. Autrement dit ; g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, on a

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ avec } f'(x) = 1 - \frac{x+1}{\sqrt{x(x+2)}} \text{ d'où } g'(x) = \frac{1 - \frac{x+1}{\sqrt{x(x+2)}}}{x+1 - \sqrt{x(x+2)}}, \text{ soit } g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x(x+2)}}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a $g'(x) < 0$ donc

la fonction g est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

- (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant la quantité conjuguée, il vient

$$g(x) = \ln((x+1 - \sqrt{x(x+2)}) \times \frac{x+1 + \sqrt{x(x+2)}}{x+1 + \sqrt{x(x+2)}})$$

$$\text{c'est-à-dire } g(x) = \ln\left(\frac{(x+1)^2 - x(x+2)}{x+1 + \sqrt{x(x+2)}}\right), \text{ soit } g(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1 + \sqrt{x(x+2)}}\right).$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 + \sqrt{x(x+2)}) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1 + \sqrt{x(x+2)}} = 0^+$. Par ailleurs,

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty \text{ donc par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

- (d) En récapitulant les résultats des questions précédentes, on obtient le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		—
g	0	$-\infty$