TD14 – Correction

Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice 1:

1. Une main est une combinaison de 5 cartes parmi 32. Il y a donc $\binom{32}{5} = 201376$ possibilités.
2. Un mélange est une permutation des 32 cartes, il y a donc $32!$ mélanges possibles.
3. (a) Un mot est une 4-liste sans répétition de l'ensemble $\{A, B, \ldots, Z\}$. Le nombre de mots possibles est donc $\frac{26!}{22!} = 358800$.
   (b) Un mot est un élément du produit cartésien $\{A, \ldots, Z\}^4$. Il y a donc $26^4 = 456976$ possibilités.
   (c) Avec une poignée de 4 lettres, on ne peut créer qu'un seul mot puisqu'il faut les placer dans l'ordre alphabétique. Donc un mot est une combinaison de 4 lettres parmi 26. Il y a $\binom{26}{4} = 14950$ possibilités.
4. Une plaque est un élement du produit cartésien $\{A, \ldots, Z\}^2 \times \{0, \ldots 9\}^3 \times \{A, \ldots, Z\}^2$. Il y a donc $26^2 \times 10^3 \times 26^2 = 456976000$ possibilités.
5. Une partie est un élement du produit cartésien $\{P, F\}^4$. Il y a donc $2^4 = 16$ possibilités.
6. Un anagramme est une permutation des 7 lettres distinctes du mot abricot donc il y a 7! possibilités.
7. Pour chaque objet il faut choisir un des tiroirs pour le ranger donc un rangement est un élément du produit cartésien $\{T_1, T_2, T_3\}^4$. Il y a donc $3^4 = 81$ possibilités.
8. Choisir la place des 4 personnes consiste à choisir une 4-liste sans répétitions de sièges. Il y a donc $\frac{6!}{(6-4)!} = 360$ possibilités.
9. Le jeu consiste à choisir une combinaison de 5 numéros parmi 49. il y a donc $\binom{49}{5} = 1906884$ possibilité.
10. Chaque enfant choisit une pièce donc une répartition est un élément du produit cartésien : $\{Piece1, Piece2, Piece3, Piece4\}^{10}$. Il y a donc 4^{10} répartitions possibles.

Exercice 2:

1. $A = \left\{a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10 + f | (a, b, c, d, e, f) \in [\![1, 9]\!]^6\right\}$.
   Ainsi $Card(A) = Card([\![1, 9]\!]^6) = 9^6 = 531441$
2. $A_1 = \left\{a10^5 + b10^4 + c10^3 + d10^2 + e10 + f | (a, b, c, d, e, f) \text{ 6-liste sans répétition d'éléments de } [\![1, 9]\!]\right\}$.
   Ainsi $Card(A_1) = Card(\{6 - \text{listes sans répétition d'éléments de } [\![1, 9]\!]\}) = \frac{9!}{(9-6)!} = 60480$
3. $A_2 = \left\{a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10 + f | (a, b, c, d, e, f) \in [\![1, 9]\!]^5 \times \{2, 4, 6, 8\}\right\}$
   donc $Card(A_2) = Card([\![1, 9]\!]^5) \times Card(\{2, 4, 6, 8\}) = 9^5 \times 4 = 236196$
4. Pour construire un élément de A_3, il suffit de prendre une 6-combinaison de $[\![1, 9]\!]$ et de les ranger par ordre croissant (En effet pour avoir une suite strictement croissante les éléments doivent être distincts).
   Ainsi $Card(A_3) = \binom{9}{6} = 84$

Exercice 3:

1. Un rangement des 10 billes est une permutation de l'ensemble des billes. Il y a donc 10! façons de les ranger.
2. (a) On procède par choix successif.
   Pour obtenir un rangement, il faut :
   — choisir la place des 5 billes rouges parmi les 10 places possibles : $\binom{10}{5}$ possibilités.
   — choisir la place des 2 billes blanches parmi les 5 emplacement restant : $\binom{5}{2}$ possibilités.
   — placer les trois billes vertes aux emplacements restants : 1 possibilité.
   Ainsi il y a $\binom{10}{5} \times \binom{5}{2} \times 1$ rangements différents.
   (b) Les couleurs doivent rester groupées donc un rangement est une permutation des trois couleurs. Il y a donc $3! = 6$ possibilités.
   (c) Pour obtenir un rangement, il faut :
   — choisir où positionner le groupe de 5 billes rouges sur la rangée : 6 possibilités

— choisir la place des deux billes blanches parmi les 5 emplacements restant : $\binom{5}{2}$ possibilités.
— placer les trois billes vertes aux emplacements restants : 1 possibilité.
Ainsi il y a $6 \times \binom{5}{2} \times 1$ rangements différents.

Exercice 4:

1. Une main est une 13-combinaison de l'ensemble des cartes. Il y a donc $\binom{52}{13}$ mains différentes.
2. Soit A l'ensemble des mains contenant au moins un pique. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des mains ne contenant aucun pique.
   On a $card(\overline{A}) = \binom{39}{13}$ d'où $card(A) = \binom{52}{13} - \binom{39}{13}$
3. Notons $\overline{A}$ l'ensemble des mains ne contenant aucun pique et P_1 l'ensemble de mains contenant exactement un pique.
   On a déjà vu à la question précédente que $card(\overline{A}) = \binom{39}{13}$.
   Déterminons le cardinal de P_1. Procédons par choix successifs. Pour obtenir un élément de P_1 il faut :
   — choisir une carte de pique : 13 possibilités
   — Choisir les 12 autres cartes parmi celle n'étant pas des piques : $\binom{39}{12}$ possibilités.
   On a donc $card(P_1) = 13 \times \binom{39}{12}$
   or $\overline{A}$ et P_1 sont disjoints donc $card(P_0 \cup P_1) = card(P_0) + card(P_1) = \binom{39}{13} + 13 \times \binom{39}{12}$
4. Procédons par choix successifs en distinguant les mains contenant l'as de pique (A_1) de celles contenant un autre as (A_2).
   Pour construire un élément de A_1, il faut :
   — choisir l'as de pique : 1 possibilité
   — choisir un autre pique : 12 possibilités
   — choisir 11 autres cartes qui ne soit ni du pique ni un as : $\binom{36}{11}$.
   Ainsi $card(A_1) = 12 \times \binom{36}{11}$
   Pour construire un élément de A_2, il faut :
   — choisir un as qui ne soit pas du pique : 3 possibilités
   — choisir deux piques (sauf l'as) : $\binom{12}{2}$ possibilités.
   — choisir 10 autres cartes qui ne soient ni du pique ni un as : $\binom{36}{10}$ possibilités.
   Ainsi $card(A_2) = 3 \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{10}$
   Les ensembles A_1 et A_2 étant disjoints on a :
   $card(A_1 \cup A_2) = card(A_1) + card(A_2) = 12 \times \binom{36}{11} + 3 \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{10}$

Exercice 5:

1. Un tirage est une 3-liste sans répétition de l'ensemble des 11 boules. Il y a donc $\frac{11!}{(11-3)!} = 990$ possibilités.
2. Un tirage ne comportant que des boules rouges est une 3-liste sans répétition de l'ensemble des boules rouges. il y a donc $\frac{4!}{(4-3)!} = 24$ possibilités.
3. Soit R l'ensemble des tirages comportant au moins une boule rouge alors $\bar{R}$ est l'ensemble des tirages ne comportant aucune boule rouge. Les éléments de $\bar{R}$ sont donc des 3-liste sans répétition de $\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11\}$. Il y a donc $\frac{7!}{(7-3)!} = 210$ tirages dans $\bar{R}$.
   Ainsi $Card(R) = 990 - 210 = 780$
4. Soit V l'ensemble des tirages RNB.
   $V = \{6, 7, 8, 9\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{10, 11\}$
   d'où $\text{card}(V) = 4 \times 5 \times 2 = 40$
5. Soit W l'ensemble des tirages de 3 couleurs différentes.
   Il faut d'abord choisir l'ordre des couleurs. C'est une permutation de 3 couleurs donc $3\,!=6$ possibilités.
   Puis on choisit un élément de chaque couleur : 40 possibilités.
   Finalement il y a $6 \times 40 = 240$ possibilités.

6. Il faut déjà choisir l'emplacement de la boule blanche : 3 choix.
   Puis on choisit la boule blanche : 2 choix.
   Puis on choisit une 2-liste sans répétition de boules noires : $\frac{5!}{(5-2)!} = 20$ choix.
   Au total il y a donc $3 \times 2 \times 20 = 120$ tirages comportant 1 blanche et 2 noires.
7. Pour créer un tirage dans lequel le plus grand numéros est en troisième :
   — On choisit 3 boules parmi 11 : $\binom{11}{3} = 165$ choix.
   — On place le plus grand en dernier : 1 choix.
   — On place les 2 autres nombres : 2 choix.
   Finalement il y a $165 \times 2 = 330$ possibilités.

Exercice 6:

1. **Tirage successif avec remise :**
   (a) Notons J l'ensemble des jetons.
   Un tirage est un élément du produit cartésien J^3
   Donc $Card(J^3) = (Card(J))^3 = 9^3 = 729$
   (b) Notons R l'ensemble des jetons rouges.
   Un tirage sans jeton vert est un élément du produit cartésien R^3.
   Donc $Card(R^3) = (Card(R))^3 = 4^3 = 64$
   (c) Notons V l'ensemble des jetons verts.
   Un tirage avec que des jetons verts est un élément du produit cartésien V^3.
   Donc $Card(V^3) = (Card(V))^3 = 5^3 = 125$
   (d) Un tirage contenant au plus deux jetons verts est un élément de $\overline{V^3}$.
   Donc $Card(\overline{V^3}) = 729 - Card(V^3) = 729 - 125 = 604$
   (e) Notons E l'ensemble des tirages contenant le jeton vert n°2 et deux jetons rouges de numéros différents de 2.
   Notons F l'ensemble des tirages contenant le jeton rouge n°2, un jeton vert différent de 2 et un jeton rouge différent de 2.
   On cherche $Card(A \cup F)$.
   Or E et F sont des ensembles disjoints donc $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$
   Pour construire un élément de E :
   — On choisit un jeton vert numéro 2 : 1 choix
   — On le place : 3 choix
   — On sélectionne le rouge différent de 2 qui ira au premier emplacement restant : 3 choix
   — On sélectionne le rouge différent de 2 qui ira au deuxième emplacement restant : 3 choix
   On en déduit $card(E) = 3 \times 3 \times 3 = 27$

   Pour construire un élément de F :
   — On choisit un jeton rouge numéro 2 : 1 choix
   — On le place : 3 choix
   — On sélectionne un jeton vert différent du numéro 2 : 4 choix
   — On le place : 2 choix
   — On sélectionne un rouge différent de 2 pour le dernier emplacement : 3 choix
   On en déduit $card(F) = 3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$

   Finalement : $Card(E \cup F) = 27 + 72 = 99$

2. **Tirage simultané :**
   (a) En reprenant les notations de la question précédente :
   Un tirage est un 3-combinaison de J.
   Il y a donc $\binom{9}{3} = 84$ possibilités.
   (b) Les tirages dont des 3-combinaisons de R.
   il y a donc $\binom{4}{3} = 4$ possibilités.

(c) Les tirages dont des 3-combinaisons de V.
il y a donc $\binom{5}{3} = 10$ possibilités.

(d) On utilise le complémentaire de l'ensemble des tirages uniquement verts.
Il y a 84 - 10 = 74 possibilités

(e) Pour construire un élément de E :
— On choisit un jeton vert numéro 2 : 1 choix
— On choisit une 2-combinaisons de $\{R1, R_3, R_4\}$: $\binom{3}{2} = 3$ choix
On en déduit $card(E) = 1 \times 3 = 3$

Pour construire un élément de F :
— On choisit un jeton rouge numéro 2 : 1 choix
— On sélectionne un jeton vert différent du numéro 2 : 4 choix
— On sélectionne un rouge différent de 2 : 3 choix
On en déduit $card(F) = 1 \times 4 \times 3 = 12$

Finalement : $Card(E \cup F) = 3 + 12 = 15$

Je me perfectionne !

Exercice 7:

1. Pour chaque chemise, il faut choisir un tiroir donc un rangement est un élément du produit cartésien $\{T_1, T_2, T_3\}^n$ de cardinal 3^n.
2. Pour que seuls 2 tiroirs soient occupés, il faut choisir 2 tiroirs parmi les 3 : $\binom{3}{2} = 3$ choix.
   Puis on effectue un rangement c'est à dire qu'on construit un élément de $\{T_i, T_j\}^n$: 2^n choix.
   Mais il faut éliminer le cas où toutes les chemises sont en T_i ou toutes en T_j.
   Au total il y a donc $3 \times (2^n - 2)$ possibilités.

Exercice 8:

⋆ Montrons que l'application f est surjective. On a $\varnothing \in \mathcal{P}([\![1,3]\!])$, $\{1\} \in \mathcal{P}([\![1,3]\!])$, $\{1,2\} \in \mathcal{P}([\![1,3]\!])$ et $\{1,2,3\} \in \mathcal{P}([\![1,3]\!])$. De plus, $f(\varnothing) = 0$, $f(\{1\}) = 1$, $f(\{1,2\}) = 2$ et $f(\{1,2,3\}) = 3$. On en déduit que tout élément de $[\![0,3]\!]$ admet un antécédent dans $\mathcal{P}([\![1,3]\!])$ par f. Donc $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

⋆ Montrons que f n'est pas injective. L'élément 1 de $[\![0,3]\!]$ admet au moins deux antécédents par f : $\{1\} \in \mathcal{P}([\![1,3]\!])$ et $\{2\} \in \mathcal{P}([\![1,3]\!])$. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$

Exercice 9:

Une surjection est possible car le cardinal de l'ensemble de départ est supérieur à celui d'arrivée.
Deux éléments auront forcément la même image.
Pour construire une telle surjection, il faut donc :
— Choisir l'élément dans l'ensemble d'arrivée qui aura deux antécédents : 4 choix.
— Choisir ses deux antécédents dans l'ensemble de départ : $\binom{5}{2} = 10$ choix.
— Associer les trois derniers élément de l'ensemble de départ avec les trois derniers éléments de l'ensemble d'arrivée en bijection. Il y a donc $3! = 6$ choix.
Au total il y a $4 \times 10 \times 6 = 240$ surjections possibles.

Exercice 10:

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Puisque x et y sont des entiers naturels, ils appartiennent à $[\![0,n]\!]$.
   Procédons par choix successifs :
   — On choisit la valeur de x dans $[\![0,n]\!]$: $n+1$ possibilités
   — On choisit la valeur de y telle que $y = n - x$: 1 possibilité
   Au total il y a donc $(n+1)$ couples (x,y) solutions de l'équation $x + y = n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Puisque x, y et z sont des entiers naturels, ils appartiennent à $[\![0, n]\!]$.
   Si on suppose $z \in [\![0, n]\!]$ fixé alors il reste à résoudre $x + y = n - z$
   Or d'après la question précédente, cette équation admet $n - z + 1$ possibilités.
   Sommons donc toutes les possibilités suivant la valeur de z choisie :
   $$\begin{aligned}\sum_{z=0}^{n}(n-z+1) &= \sum_{z=0}^{n}(n+1) - \sum_{z=0}^{n} z \\ &= (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)((n+1) - \frac{n}{2}) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$
   Au total il y a donc $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ triplets (x, y, z) solutions de l'équation $x + y + z = n$

Exercice 11:

1. (a) Notons N l'ensemble des nucléotides. $N = \{A, G, C, U\}$. Card$(N) = 4$.
   Notons C l'ensemble des codons.
   On a $C = N^3$
   Ainsi $\boxed{\text{Card}(C)=\text{Card }(N^3) = (\text{Card}(N))^3 = 4^3 = 64}$

   (b) Selon le même raisonnement, si les codons étaient constitués de 2 nucléotides, on aurait $C = N^2$.
   Soit $\boxed{\text{Card}(C)=\text{Card }(N^2) = (\text{Card}(N))^2 = 4^2 = 16}$
   Cela ne serait pas suffisant pour coder 20 acides aminés différents.
2. Notons B l'ensemble des brins.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a $B = C^n$ d'où $\boxed{\text{Card}(B) = \text{Card}(C^n) = (\text{Card}(C))^n = 64^n}$
3. Notons B_i l'ensemble des brins contenant au moins un codon d'initialisation et étudions le cardinal de $\overline{B_i}$ l'ensemble des brins qui n'ont pas de codon d'initialisation.
   On a $\overline{B_i} = (C \setminus \{AUG\})^n$.
   Ainsi Card$(\overline{B_i}) = (\text{Card}(C \setminus \{AUG\}))^n = 63^n$.
   On en déduit donc que $\boxed{\text{Card}(B_i) = 64^n \text{ - Card}(\overline{B_i}) = 64^n - 63^n}$
4. Notons B_t l'ensemble des brins contenant au moins un codon de terminaison et étudions le cardinal de $\overline{B_t}$ l'ensemble des brins qui n'ont pas de codon de terminaison.
   On a $\overline{B_t} = (C \setminus \{UAG, UGA, UAA\})^n$.
   Ainsi Card$(\overline{B_t}) = (\text{Card}(C \setminus \{UAG, UGA, UAA\}))^n = 61^n$.
   On en déduit donc que $\boxed{\text{Card}(B_t) = 64^n \text{ - Card}(\overline{B_t}) = 64^n - 61^n}$
5. Notons B_{it} l'ensemble des brins contenant un codon d'initialisation et un codon de terminaison.
   Pour construire un brin de B_{it}, il faut :
   — Choisir un codon d'initialisation : 1 possibilité.
   — Placer le codon d'initialisation dans le brin : n possibilités.
   — Choisir un codon de terminaison : 3 possibilités.
   — Placer le codon de terminaison parmi les (n-1) places restantes dans le brin : $(n-1)$ possibilités.
   — Placer un des 60 codons différents des codons d'initialisation et de terminaison à chacun des $(n-2)$ emplacements restants : 60^{n-2} possibilités.

   Finalement $\boxed{\text{Card}(B_{it}) = 3 \times n \times (n-1) \times 60^{n-2}}$

Exercice 12:

Question préliminaire :

```
def factorielle(n):
    if (n==0):
        return 1
    else :
        return n*factorielle(n-1)
```

Partie A

1. Notons : E l'ensemble des enfants de cardinal 9.
   F l'ensemble des filles de cardinal 5.
   G l'ensemble des garçons de cardinal 4.
   T l'ensemble des tirages possibles selon cette expérience.

   Chaque tirage correspond à une 3-liste sans répétition de E d'où $\boxed{\text{card}(T) = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504}$

2. Notons T_2 l'ensemble des tirages donnant une équipe uniquement féminine.
   Un élément de T_2 et une 3-liste sans répétition de F d'où :
   $\boxed{\text{Card}(T_2) = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60}$

3. Notons T_3 l'ensemble des tirages constitués d'au plus deux filles.
   Alors $\overline{T_3}$ est l'ensemble des tirages constitués de trois filles, c'est à dire $\overline{T_3} = T_2$.
   Autrement dit :
   $\boxed{\text{Card}(T_3) = \text{Card}(T) \text{ - Card}(\overline{T_3}) = \text{Card}(T) \text{ - Card}(T_2) = 504 - 60 = 444}$

4. Soit T_4 l'ensemble des tirage comprenant exactement une fille et exactement un enfant dont le prénom commence par D.
   Un tel tirage est composé soit de Delphine et de deux autres garçons dont le nom ne commence pas par D (On notera D_1 l'ensemble de ces tirages), soit de David , d'une fille dont le nom ne commence pas par D et d'un autre garçon dont le nom ne commence pas par D (On notera D_2 l'ensemble de ces tirages).
   Commençons par dénombrer les éléments de D_1. Pour construire un tirage de D_1, il faut :
   — Choisir Delphine : 1 possibilité.
   — Choisir sa tâche : 3 possibilités.
   — Choisir deux garçons dont le nom ne commence pas par D et leur attribuer des tâches. Il s'agit donc de choisir une 2-liste sans répétition de $G\backslash$David, soit $\dfrac{3!}{(3-2)!} = 6$ possibilités.

   Finalement card$(D_1) = 3 \times 6 = 18$.
   Dénombrons maintenant les éléments de D_2. Pour construire un tirage de D_2, il faut :
   — Choisir David : 1 possibilité.
   — Choisir sa tâche : 3 possibilités.
   — Choisir une fille dont le nom ne commence pas par D : 4 possibilités.
   — Attribuer une tâche à cette fille : 2 possibilités.
   — Choisir un garçon dont le nom ne commence pas par D : 3 possibilités.
   — Lui attribuer une tâche : 1 possibilité.
   Finalement card$(D_2) = 3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$.

   On a $T_4 = D_1 \cup D_2$. Or D_1 et D_2 sont des ensembles disjoints donc
   card(T_4)=card(D_1) + card(D_2).
   On a donc $\boxed{\text{card}(T_4) = 90}$

Partie B

1. Cette fois-ci les tirages se font simultanément donc sans ordre. On note Eq l'ensemble des équipes.

   Une équipe est une 3-combinaison de l'ensemble des enfants. On a donc $\boxed{\text{Card}(Eq) = \binom{9}{3} = \dfrac{9!}{3!6!} = 84}$.

2. Soit M l'ensemble des équipes masculines.

   Une équipe masculine est une 3-combinaison de l'ensemble G d'où $\boxed{\text{Card}(M) = \binom{4}{3} = 4}$

3. Soit S l'ensemble des équipes comprenant un binôme aux même initiales.
   Pour construire un élément de S, il faut :

— Choisir le binôme parmi les duos d'initiales similaires : 4 possibilités (A,B,C ou D).
— Choisir un autre enfant parmi ceux qui restent : 7 possibilités.

On a donc $\boxed{\text{card}(S) = 4 \times 7 = 28}$

4. Notons V l'ensemble étudié et V_1 l'ensemble des tirages qui contiendront *Arnaud* et deux filles dont le nom ne commence pas par A. On appellera V_2 l'ensemble des tirages contenant *Audrey* et un garçon et une fille dont les noms ne commencent pas par A.

   Dénombrons les éléments de l'ensemble V_1. Pour construire un élément de V_1, il faut :
   — Choisir *Arnaud* : 1 possibilité.
   — Choisir 2 filles parmi celles dont le nom ne commence pas par A : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités.
   On a donc card(V_1)= 6.

   Dénombrons les éléments de l'ensemble V_2. Pour construire un élément de V_2, il faut :
   — Choisir *Audrey* : 1 possibilité.
   — Choisir 1 filles parmi celles dont le nom ne commence pas par A : 4 possibilités.
   — Choisir un garçon parmi ceux dont le nom ne commence pas par A : 3 possibilités.
   On a donc card(V_2)= $4 \times 3 = 12$.

   Par ailleurs $V = V_1 \cup V_2$ et V_1 et V_2 sont disjoints donc $\text{card}(V) = \text{card}(V_1) + \text{card}(V_2)$.

   Ainsi $\boxed{\text{card}(V) = 6 + 12 = 18}$

Partie C

1. Soit P l'ensemble des planning possibles. Un planning est un élément du produit cartésien E^5.

   on a donc $\boxed{\text{card}(P) = \text{card}(E^5) = 9^5 = 59049}$

2. Pour chaque enfant on peut associer un planning qui lui attribuerait le trampoline toute la semaine.

   $\boxed{\text{Il y a donc 9 plannings possibles de ce type}}$

3. Soit P' l'ensemble des plannings réservés seulement à des garçons.

   Un planning de ce type est un élément du produit cartésien G^5. donc $\boxed{\text{card}(P') = \text{card}(G^5) = 4^5 = 1024}$

4. On ne veut pas qu'un même enfant utilise le trampoline plusieurs fois dans la semaine.

   Soit U l'ensemble des plannings de ce type.

   Un élément de U est une 5-liste sans répétition de E donc :

   $$\boxed{\text{card}(U) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 15120}$$

5. Notons Z l'ensemble des plannings contenant au plus deux fois le même enfant.

   Nous avons dénombré à la question précédente les plannings contenant au plus une fois le même enfant.

   Dénombrons maintenant les plannings contenant exactement deux fois le même enfant (avec trois autres enfants distints). On notera W_1 cet ensemble.

   Pour construire un élément de W_1, il faut :
   — Choisir l'enfant qui aura le droit de faire deux fois du trampoline : 9 possibilités.
   — Choisir deux jours dans la semaine pour cet enfant : $\binom{5}{2} = 10$ possibilités.
   — Choisir trois autres enfants distincts et leur attribuer un jour de la semaine. Cela consiste à faire une 3-liste sans répétition dans l'ensemble des enfants restant : $\dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8!}{5!} = 336$

   On a donc $\text{card}(W_1) = 9 \times 10 \times 336 = 30240$

   Dénombrons maintenant les plannings contenant exactement deux fois le même enfant à deux reprises (avec un autre enfant distinct). On notera W_2 cet ensemble.

   Pour construire un élément de W_2, il faut :
   — Choisir les deux enfants qui auront le droit de faire deux fois du trampoline dans la semaine : $\binom{9}{2} = 36$ possibilités.
   — Choisir les quatre jours réservés à ces enfants : $\binom{5}{4} = 5$ possibilités.
   — Choisir la répartition des quatre jours entre les deux enfants chanceux : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités.
   — Choisir un dernier enfant pour le jour restant à attribuer : 7 possibilités.

On a donc $\text{card}(W_2) = 36 \times 5 \times 6 \times 7 = 7560$
Comme $Z = U \cup W_1 \cup W_2$ et que U , W_1 et W_2 sont deux à deux disjoints, on a :
$\text{card}(W) = \text{card}(U) + \text{card}(W_1) + \text{card}(W_2)$
Ainsi $\boxed{\text{card}(W) = 15120 + 30240 + 7560 = 52920}$