

TD15 – CORRECTION

Exercice 1:

1. A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
 ★ **Écriture paramétrée** : $A = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 ★ **Écriture sous la forme d'un vect** : $A = \text{vect}((1, 1))$
2. B n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (il ne contient pas $0_{\mathbb{R}^2}$).
3. C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable pour l'addition (trouvez un contre-exemple!).
4. D n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il ne contient pas $0_{\mathbb{R}^2}$ (raisonnez par l'absurde!).

Exercice 2:

Pour montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, il est souvent commode d'essayer de l'écrire directement sous la forme $\text{vect}(\dots)$.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in A &\iff 2x + y - z = 0 \\
 &\iff z = 2x + y \\
 &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = 2a + b \end{cases} \\
 &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, y, z) = a(1, 0, 2) + b(0, 1, 1) \\
 &\iff (x, y, z) \in \text{vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1))
 \end{aligned}$$

Le raisonnement par équivalence donne :

$$A = \text{vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1)).$$

A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Il est donné dans l'énoncé par son écriture cartésienne.

- ★ **Écriture paramétrée** : $A = \{(a, b, 2a + b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
- ★ **Écriture sous la forme d'un vect** : $A = \text{vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1))$
2. B n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car il n'est pas stable pour l'addition (trouvez un contre-exemple!).
3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in C &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x = 2a + b \\ y = 3a - b \\ z = a \end{cases} \\
 &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, y, z) = a(2; 3; 1) + b(1; -1; 0) \\
 &\iff (x, y, z) \in \text{vect}((2, 3, 1), (1, -1, 0))
 \end{aligned}$$

Le raisonnement par équivalence donne $C = \text{vect}((2, 3, 1), (1, -1, 0))$. Donc C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in C &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x = 2a + b \\ y = 3a - b \\ z = a \end{cases} \\
 &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x = 2z + b \\ y = 3z - b \\ z = a \end{cases} \\
 &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x + y = 5z & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ y = 3z - b \\ z = a \end{cases} \\
 &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x + y = 5z & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 3z - y = b \\ z = a \end{cases} \\
 &\iff x + y = 5z
 \end{aligned}$$

L'écriture cartésienne de C est $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 5z = 0\}$.

4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in D &\iff \begin{cases} 2x &= y \\ y &= 3z \end{cases} \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x &= \frac{3}{2}a \\ y &= 3a \\ z &= a \end{cases} \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x; y; z) = a \left(\frac{3}{2}; 3; 1 \right) \\ &\iff (x; y; z) \in \text{vect} \left(\left(\frac{3}{2}; 3; 1 \right) \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$D = \text{vect} \left(\left(\frac{3}{2}; 3; 1 \right) \right).$$

D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. La forme paramétrée de D est $D = \left\{ \left(\frac{3a}{2}, 3a, a \right) \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. L'écriture cartésienne de D est celle donnée dans l'énoncé.

5. De par son écriture, on sait que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, y, z) = a(1, 2, 3) + b(0, 1, 1) \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x &= a \\ y &= 2a + b \\ z &= 3a + b \end{cases} \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x &= a \\ y &= 2x + b \\ z &= x + y \end{cases} \\ &\iff z = x + y \end{aligned}$$

★ **Écriture paramétrée :** $E = \{(a, 2a + b, 3a + b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

★ **Écriture cartésienne :** $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$

6. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $F = \text{vect}((1, 1, 0), (1, -1, 2))$. L'écriture cartésienne de F est $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$.

7. G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car il ne contient pas $0_{\mathbb{R}^3}$.

8. H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

★ **Écriture paramétrée :** $A = \{(2t - z, 2t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$

★ **Écriture sous la forme d'un vect :** $A = \text{vect}((2, 2, 0, 1), (-1, 0, 1, 0))$

Exercice 3:

1. (a) Une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ doit comporter au moins $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ vecteurs. Comme la famille $\mathcal{F}_1$ n'en comporte que deux, cette famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(b) Le plus simple est de montrer que la famille $\mathcal{F}_2$ est de rang 3, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit pour montrer que la famille engendre $\mathbb{R}^3$. On peut aussi montrer par double inclusion que $\mathbb{R}^3 = \text{vect}(\mathcal{F}_2)$, ce qui montre que la famille $\mathcal{F}_2$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Montrons qu'elle est de rang 3 en considérant le rang de la matrice associée :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Ce qui en inversant L_2 et L_3 donne une matrice triangulaire de rang 3.

(c) Méthode 1 : On calcule le rang de la famille. On trouve $\text{Rg}(\mathcal{F}_2) = 2$. Donc $\mathcal{F}_2$ ne peut pas engendrer un espace vectoriel de dimension 3. Ce qui revient à déterminer le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice contient deux lignes identiques donc son rang est inférieur ou égal à 2, ce qui suffit pour affirmer que la famille n'est pas génératrice.

Méthode 2 : On trouve qu'un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}_3$ si et seulement si $y - z = 0$. Donc par exemple le vecteur $(0, 1, 0)$ n'appartient pas à $\text{vect}(\mathcal{F}_3)$. Donc $\mathcal{F}_3$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. La famille $\mathcal{G}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$, puisque par exemple $(3, 1)$ et $(-1, 2)$ ne sont pas colinéaires. Ces deux vecteurs sont donc libres et forment une base de $\mathbb{R}^2$ car $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. Pour montrer qu'ils ne sont pas colinéaires, trouvons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$a(3, 1) + b(-1, 2) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (3a - b, a + 2b) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ 7a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Il n'existe pas $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ non tous les deux nuls tel que $a(3, 1) + b(-1, 2) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

3. La famille $\mathcal{H}$ est génératrice de $\mathbb{C}^2$. On raisonne de même. On peut aussi calculer le rang de la matrice associée.

Exercice 4:

1. $w \in \text{vect}(u, v)$ si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w = xu + yv$. C'est à dire si et seulement si il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 1 \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - (1 - 2m) = 1 \\ y = 1 - 2m \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ y = 1 - 2m \\ x = m \end{cases}$$

donc il faut et il suffit que $m = \frac{2}{3}$.

2. $w \in \text{vect}(u, v)$ si et seulement si il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w = xu + yv$. C'est à dire si et seulement si il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} x + y = m \\ x + my = 1 \\ x - y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + y = m \\ m + my = 1 \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ m = 1 \\ x = m \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

donc il faut et il suffit que $m = 1$.

Exercice 5:

1. Les vecteurs u et v n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$.

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

On a montré que $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

La famille (u, v, w) est libre. On aurait pu aussi utiliser le rang pour montrer la liberté de la famille.

3. Cette famille est liée car $u = w$. On a par exemple la relation de dépendance $1 \times u + 0 \times v + 1 \times w = 0_{\mathbb{R}^3}$.
4. Une famille libre de $\mathbb{R}^3$ comporte au plus trois vecteurs. Comme la famille proposée comporte quatre vecteurs, elle est nécessairement liée.
5. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{3}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \frac{37}{3}\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_1 = 0. \end{aligned}$$

La famille (u, v, w) est donc libre. Remarque les calculs que l'on vient de faire sont les mêmes que ceux effectués pour calculer le rang de la matrice associée à (u, v, w) . On aurait d'ailleurs pu répondre à la question en calculant directement ce rang.

Exercice 6:

1. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$, tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + m\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + m\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ (m-1)\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + m\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \xleftrightarrow{\Leftrightarrow} L_3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ (m-1)\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + m\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - (m-1)L_2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ - (m(m-1)+1)\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + m\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_4 \xleftrightarrow{\Leftrightarrow} L_3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + m\lambda_4 = 0 \\ - (m(m-1)+1)\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 + (m(m-1)+1)L_3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + m\lambda_4 = 0 \\ ((m(m-1)+1)m-1)\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre si et seulement si la seule solution du système précédent est $(0, 0, 0, 0)$ donc si et seulement si : $((m(m-1)+1)m-1) \neq 0$ donc si et seulement si $-m^3 + m^2 - m + 1 \neq 0$. On remarque que 1 est une racine de cette équation et on a la factorisation $-m^3 + m^2 - m + 1 = -(m-1)(m^2 + m + 1)$. L'équation $m^2 + m + 1 = 0$ n'admettant pas de solution réelle, on conclut que la famille est libre si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. On raisonne de la même façon et on trouve que la famille est libre si et seulement si $-k^2 + k + 12 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 4\}$.

Exercice 7:

On montre que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ en montrant (par exemple) qu'elle est libre et en utilisant le fait que toute famille libre de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3 (en l'occurrence $\mathbb{R}^3$) en est une base. Pour trouver les coordonnées de $(2, 1, 3)$ dans cette base de $\mathbb{R}^3$, on résout l'équation $(2, 1, 3) = \alpha u + \beta v + \gamma w$ d'inconnue $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On trouve que les coordonnées de $(2, 1, 3)$ dans cette base sont $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8:

Pour trouver une base de chacun des espaces vectoriels proposés, on commence par l'écrire sous la forme $\text{vect}(\dots)$.

- La famille $((3, 1, -2), (5, -1, -4), (-1, 5, 2))$ n'est pas libre. En revanche, la famille $((3, 1, -2), (5, -1, -4))$ est libre. C'est donc une base de A .
- On a $B = \text{vect}((1, -1, 0), (0, 0, 1))$ et $((1, -1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de B .
- On a $C = \text{vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1))$ et $((1, 2, 0), (0, 3, 1))$ est une base de C .
- Le rang de la famille $((1, 0, 1), (0, 1, 0), (2, 2, 2), (1, -1, 1))$ est égal à 2. En effet les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 0)$ forment une famille libre et $2(1, 0, 1) + 2(0, 1, 0) = (2, 2, 2)$ et $(1, 0, 1) - (0, 1, 0) = (1, -1, 1)$. La famille $((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ est libre donc c'est une base de D .
- On a $E = \text{vect}((1, 1, 3), (1, -1, 0))$ et $((1, 1, 3), (1, -1, 0))$ est libre donc est une base de E .
- On trouve que $F = \text{vect}((-11, -4, 1))$ et une base de F est $((-11, -4, 1))$.

7. On trouve que $G = \text{vect}(\mathcal{G})$ où $\mathcal{G} = ((1, -2, 3), (-1, 2, 2), (-1, 2, -2))$. La famille $\mathcal{G}$ est de rang 2 donc ce n'est pas une base de G . On peut par exemple écrire la matrice associée aux vecteurs de la famille :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et remarquer que $-2L_1 = L_2$. Donc la matrice est de rang inférieure ou égale à 2 (puisque la matrice est carrée de taille 3). Enfin $(-1, 2, 2)$ et $(-1, 2, -2)$ ne sont pas colinéaires donc la matrice précédente est au moins de rang 2. Elle est donc de rang 2. Une base de G est $((1, -2, 3), (-1, 2, 2))$.

Exercice 9:

1. Une base de $\mathbb{R}^2$ contient $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ vecteurs. Comme la famille (u, v, w) comporte trois vecteurs, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Comme de plus $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, la famille $\mathcal{B} = (u, v)$, qui est constituée de deux vecteurs, est une base de $\mathbb{R}^2$. On procède de la même manière pour la famille $\mathcal{C}$.
3. On résout l'équation $z = \alpha u + \beta v$ d'inconnue $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On trouve que les coordonnées de z dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 12/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}$. On procède de la même manière : les coordonnées de z dans la base $\mathcal{C}$ sont $\begin{pmatrix} 29/17 \\ -1/17 \end{pmatrix}$.
4. Les coordonnées sont différentes ; celles-ci dépendent effectivement de la base choisie de $\mathbb{R}^2$.
5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On résout l'équation $(x, y) = \alpha u + \beta v$ d'inconnue $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On trouve que les coordonnées de (x, y) dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} \frac{2x-y}{7} \\ \frac{x+3y}{7} \end{pmatrix}$.

Exercice 10:

1. Une base de $\mathbb{R}^3$ contient trois vecteurs. Comme la famille (u, v) n'en contient que deux, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Par définition de F , la famille (u, v) est une famille génératrice de F . De plus, cette famille est libre car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit donc que (u, v) est une base de F . On a donc $\dim(F) = 2$.
3. On trouve que $y = \frac{5}{2}u - \frac{1}{2}v$ donc $y \in F$. Les coordonnées de y dans la base (u, v) sont $\begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.
4. En résolvant l'équation $z = \alpha u + \beta v$ d'inconnue $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on trouve un système échelonné avec une condition de compatibilité qui n'est pas satisfaite. On en déduit que l'équation initiale n'a pas de solution et donc que $z \notin F$.
5. Soit $(x, y, z) \in F$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha u + \beta v = (x, y, z)$. Alors :

$$\alpha u + \beta v = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha + 2\beta = y \\ 2\alpha + \beta = z \end{cases}$$

On sait que α et β existent puisque (u, v) est une base de F donc on peut se contenter d'étudier les deux premières équations du système précédent afin de mettre α et β en fonction de x, y et z (ici juste en fonction de x et y). On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha + 2\beta = y \\ 3\alpha + \beta = z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha + 2\beta = y \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ \alpha + \beta = \frac{y}{2} \end{cases} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ -2\beta = \frac{y}{2} - x \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}y \\ \beta = \frac{x}{2} - \frac{y}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) de F dans la base (u, v) sont donc $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y \end{pmatrix}$.

Notons que l'on aurait pu aussi écrire les coordonnées en fonction de y et z (ou en fonction de x et z). Par

exemple en prenant les deux dernières équations :

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = y \\ 3\alpha + \beta = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + z - 3\alpha = \frac{y}{2} \\ \beta = z - 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{z}{2} - \frac{y}{4} \\ \beta = -\frac{z}{2} + \frac{3y}{4} \end{cases}$$

Les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) de F dans la base (u, v) sont donc aussi $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}y \\ -\frac{1}{2}z + \frac{3}{4}y \end{pmatrix}$.

Ces deux écritures sont équivalentes car $(x, y, z) \in F$. On peut pour s'en convaincre déterminer une équation cartésienne de F . En utilisant les calculs précédents on trouve :

$$3\left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{4}y\right) + \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = z \Leftrightarrow -x + 2y = z$$

Exercice 11:

Il y a plusieurs méthodes pour montrer que les familles proposées sont des bases de $\mathbb{R}^3$. La plus rapide consiste à montrer que leur rang est égal à 3.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(2, 1, 0) = (x, y, z)$. Cette dernière équation équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = x \\ \alpha + \beta + \gamma = y \\ \beta = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = x - z \\ \alpha + \gamma = y - z \\ \beta = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = x - y \\ \alpha + \gamma = y - z \\ \beta = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = x - y \\ \alpha = 2y - x - z \\ \beta = z \end{cases}$$

où l'on a fait, pour trouver l'avant dernier système l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$.

Les coordonnées de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}_1$ sont donc $\begin{pmatrix} -x + 2y - z \\ z \\ x - y \end{pmatrix}$.

On peut remarquer que la résolution du système précédent permet en même temps de déterminer les coordonnées du vecteur et de prouver que la famille constitue une base de $\mathbb{R}^3$: on a prouvé que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, elle est donc génératrice. Elle comporte 3 vecteurs et la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3. Donc c'est une base. Ou plus simplement le système précédent possède pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ une unique solution ce qui implique que la famille en question est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. De la même façon les coordonnées de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}_1$ sont $\begin{pmatrix} \frac{x}{4} - \frac{3y}{2} + \frac{3z}{4} \\ -\frac{x}{2} + y - \frac{z}{2} \\ \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 12:

1. $\text{rg}(\mathcal{F}_1) = 2$
2. $\text{rg}(\mathcal{F}_2) = 2$
3. $\text{rg}(\mathcal{F}_3) = 2$
4. $\text{rg}(\mathcal{F}_4) = 3$
5. $\text{rg}(\mathcal{F}_5) = 3$

Exercice 13:

On calcule le rang de $\mathcal{F}_\lambda$ en échelonnant la matrice des coordonnées des vecteurs de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On compte ensuite le nombre de pivots non nuls. On trouve

$$\text{rg}(\mathcal{F}_\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 1 \\ 3 & \text{si } \lambda = -3 \\ 4 & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\} \end{cases}$$

Exercice 14:

1. On trouve que $E = \text{vect}((-1, 1, 0, 0), (-2, 0, -1, 1))$ et $F = \text{vect}((-2, 1, 1, 0), (5, -4, 0, 1))$ donc E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Une forme paramétrée de E est

$$E = \{(-y - 2t, y, -t, t) \mid (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Les vecteurs $(-1, 1, 0, 0)$ et $(-2, 0, -1, 1)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de E . De plus, d'après la question 1., ces vecteurs forment une famille génératrice de E . Donc $((-1, 1, 0, 0), (-2, 0, -1, 1))$ est une base de E . De plus, $\dim(E) = 2$.

3. D'après la question 1., une famille génératrice de F est $((-2, 1, 1, 0), (5, -4, 0, 1))$. Cette famille est de plus libre car les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires. On en déduit que cette famille est une base de F . Comme elle comporte deux vecteurs, on a $\dim(F) = 2$. On trouve qu'une écriture cartésienne de F est

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x + 5y + 3z = 0 \text{ et } x + 2y + 3t = 0\}$$

4. Soit $v \in \mathbb{R}^4$. Alors $v \in F$ si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = (-2a + 5b, a - 4b, a, b)$. On remplace ensuite dans l'écriture cartésienne de E pour en déduire une relation sur les paramètres a et b . On trouve que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
5. On trouve que (par exemple) la famille $\mathcal{F} = ((-1, 1, 0, 0), (-2, 0, -1, 1), (-2, 1, 1, 0), (5, -4, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (en montrant par exemple que le rang de cette famille vaut $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$).

Exercice 15:

1. Soit on montre directement avec la définition que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, soit on montre que $E = \text{vect}((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ et $F = \text{vect}((1, 1, 1, 1))$.
2. On trouve que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
3. $\dim(E) = 3$ et $\dim(F) = 1$

Exercice 16:

Soit $v_1 = (2, -1, -1)$, $v_2 = (-1, 2, 3)$, $v_3 = (1, 4, 7)$ et $v_4 = (1, 1, 2)$. On pose $F = \text{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

1. La famille contient 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (espace vectoriel de dimension 3). Une famille libre de $\mathbb{R}^3$ contient au maximum 3 vecteurs la famille est donc liée.
2. On peut remarquer que $v_1 + v_2 = v_4$ et $2v_1 + 3v_2 = v_3$ donc $F = \text{vect}(v_1, v_2)$. v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre et (v_1, v_2) est donc une base de F . Donc $\dim(F) = 2$.
3. Il s'agit de trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) est libre. On peut prendre $w = (1, 0, 0)$.
En effet soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $av_1 + bv_2 + cw = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a alors nécessairement $-a + 2b = 0$ et $-a + 3b = 0$ donc $a = 0$ et $b = 0$. Donc $c = 0$. La famille est bien libre.

Exercice 17: R aisonnons par double implication.

Si $G \subset F$ ou $F \subset G$ alors $F \cup G = F$ ou $F \cup G = G$. On a donc bien $F \cup G$ qui est un sous-espace vectoriel.

Si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E . Raisonnons par l'absurde. Supposons que $G \not\subset F$ et $F \not\subset G$. Il existe donc un vecteur $u \in F \setminus G$ et un vecteur $v \in G \setminus F$. On alors u et v appartiennent à $F \cup G$. Alors toute combinaison linéaire de u et v appartient à $F \cup G$, notamment $u + v$.

Donc $u + v$ appartient à F ou à G . Si $u + v$ appartient à F alors il existe $x_F \in F$ tel que $u + v = x_F$ donc $v = x_F - u \in F$ (F étant un sous-espace vectoriel) : c'est impossible puisque $v \in G \setminus F$. De même si $u + v$ appartient à G alors nécessairement $u \in G$: c'est impossible car $u \in F \setminus G$. On arrive donc à une contradiction. Par l'absurde $G \subset F$ ou $F \subset G$.

Par double implication on a montré l'équivalence.

Exercice 18:

$(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E .

Soit $a \in E$ tel que $a \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ alors la famille $(e_1, \dots, e_p, a)$ est une famille libre.

Soit $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i (e_i + a) = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \right) a = 0_E$$

La liberté de $(e_1, \dots, e_p, a)$ implique que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ (et que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$).

Donc la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 19:

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de $\mathbb{R}^n$.

Montrons le résultat par l'absurde.

La famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre. Supposons qu'il n'existe pas $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ est libre. Alors cela signifie que tous les $(e'_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont combinaisons linéaires des $(e_1, \dots, e_{n-1})$. Comme les $(e'_1, \dots, e'_n)$ forment une base, c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Donc $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. C'est impossible puisqu'une famille de $\mathbb{R}^n$ doit contenir au moins n vecteurs.

Donc il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ est libre

Exercice 20:

1. (a) On a

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \\
 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \\
 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{array} \\
 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{17}{4}L_2 \end{array}
 \end{aligned}$$

et donc $\boxed{\operatorname{rg}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 3}$.

(b) La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de rang 3 et ce rang est égal au nombre de vecteurs de la famille donc

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^4}$$

(c) Une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ comporte au moins quatre vecteurs (car $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$). Or la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'en comporte que trois donc $\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ n'est pas une famille génératrice de } \mathbb{R}^4}$.

(d) Une base de $\mathbb{R}^4$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$. Comme $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$,

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^4}$$

(e) La famille $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ comporte quatre vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ de dimension 4. Elle est donc une base de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si son rang est égal à 4. Or

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg}(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \\
 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{array} \\
 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

et donc $\operatorname{rg}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 4$. Finalement,

$$\boxed{\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$$

(f) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On résout l'équation

$$\vec{a} = a\vec{e} + b\vec{u} + c\vec{v} + d\vec{w} \quad (\star)$$

d'inconnue (a, b, c, d) :

$$\begin{aligned}
 (\star) &\iff (1, 1, 1, 1) = (a + 2b + c - 3d, b + c, -c + d, 4b - c + 2d) \\
 &\iff \begin{cases} a + 2b + c - 3d = 1 & \text{L}_1 \\ b + c = 1 & \text{L}_2 \\ -c + d = 1 & \text{L}_3 \\ 4b - c + 2d = 1 & \text{L}_4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a + 2b + c - 3d = 1 & \text{L}_1 \\ b + c = 1 & \text{L}_2 \\ -c + d = 1 & \text{L}_3 \\ -5c + 2d = -3 & \text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 - 4\text{L}_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a + 2b + c - 3d = 1 & \text{L}_1 \\ b + c = 1 & \text{L}_2 \\ -c + d = 1 & \text{L}_3 \\ -3d = -8 & \text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 - 5\text{L}_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a = \frac{26}{3} \\ b = \frac{-2}{3} \\ c = \frac{5}{3} \\ d = \frac{8}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement, les coordonnées du vecteur $\vec{a}$ exprimé dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ sont

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

2. (a) La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une sous-famille de la famille libre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. De plus, elle est une famille génératrice de H par définition de H . On en conclut donc que

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \text{ est une base de } H \text{ et } \dim(H) = 2}$$

- (b) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors (x, y, z, t) appartient à H si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(x, y, z, t) = a\vec{u} + b\vec{v} \quad (*)$$

On résout :

$$\begin{aligned}
 (*) &\iff (x, y, z, t) = (2a + b, a + b, -b, 4a - b) \\
 &\iff \begin{cases} 2a + b = x & \text{L}_1 \\ a + b = y & \text{L}_2 \\ -b = z & \text{L}_3 \\ 4a - b = t & \text{L}_4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2a + b = x & \text{L}_1 \\ b = -x + 2y & \text{L}_2 \leftarrow 2\text{L}_2 - \text{L}_1 \\ -b = z & \text{L}_3 \\ -3b = -2x + t & \text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 - 2\text{L}_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2a + b = x & \text{L}_1 \\ b = -x + 2y & \text{L}_2 \\ 0 = -x + 2y + z & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 + \text{L}_2 \\ 0 = -5x + 6y + t & \text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 + 3\text{L}_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement, une écriture cartésienne de H est

$$\boxed{H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + 2y + z = 0 \text{ et } -5x + 6y + t = 0\}}$$

3. (a) i. On utilise une boucle **if** :

```
def vecteur(x,y,z,t) :
    if (x+2*y+z-t=0) :
        return True
    else :
        return False
```

ii. Une fois que le programme est exécuté, on tape dans la console l'instruction : `vecteur(3,1,-4,0)`.

(b) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in G &\iff x + 2y + z - t = 0 \\ &\iff x = -2y - z + t \\ &\iff (x, y, z, t) = (-2y - z + t, y, z, t)\end{aligned}$$

et donc $(x, y, z, t) \in G$ si et seulement si

$$(x, y, z, t) = y(-2, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1)$$

On en déduit donc que

$$G = \text{vect}((-2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$$

Comme G est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de (trois) vecteurs de $\mathbb{R}^4$,

$$G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4$$

(c) On étudie le rang de la famille de vecteurs $(\vec{k}, \vec{\ell}, \vec{m})$ où on a noté $\vec{k} = (-2, 1, 0, 0)$, $\vec{\ell} = (-1, 0, 1, 0)$ et $\vec{m} = (1, 0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned}\text{rg}(\vec{k}, \vec{\ell}, \vec{m}) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array}\end{aligned}$$

et donc $\text{rg}(\vec{k}, \vec{\ell}, \vec{m}) = 3$. On en déduit donc que

$$(\vec{k}, \vec{\ell}, \vec{m}) \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(G) = 3$$

4. (a) Comme G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$,

$$Z = G \cap H \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4$$

(b) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. En reprenant les écritures cartésiennes de G et H , on a

$$\begin{aligned}
 u \in G \cap H &\iff \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 & L_1 \\ -x + 2y + z = 0 & L_2 \\ -5x + 6y + t = 0 & L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 & L_1 \\ 4y + 2z - t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 16y + 5z - 4t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 & L_1 \\ 4y + 2z - t = 0 & L_2 \\ -3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2y \\ t = 4y \\ z = 0 \end{cases} \\
 &\iff (x, y, z, t) = (2y, y, 0, 4y) = y(2, 1, 0, 4)
 \end{aligned}$$

On en conclut donc que

$$Z = \text{vect}((2, 1, 0, 4)), \text{ une base de } Z \text{ est } ((2, 1, 0, 4)) \text{ et } \dim(Z) = 1$$

Exercice 21:

- On utilise la définition : on vérifie que $0_{\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in E$ et que si $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g \in E$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Il ne faut pas oublier de dire que la fonction $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. On remplace ensuite dans l'équation différentielle définissant E pour trouver les valeurs de α qui conviennent. On trouve que $f_\alpha \in E$ si et seulement si $\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$. On factorise cette expression en α afin d'obtenir une équation produit nulle. On a $\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = (\alpha - 1)^2(\alpha + 1)$. Les valeurs de α qui conviennent sont donc -1 et 1 .
- On trouve que la famille est libre en utilisant la définition de la liberté. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\dots$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0 \dots$
- Si $y \in E$, alors $y \in \mathcal{C}^3$ et donc $z = y' - y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc z est en particulier deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule ensuite z'' et en utilisant la relation vérifiée par y et ses dérivées, on obtient l'équation différentielle vérifiée par z .
- L'équation différentielle vérifiée par z est linéaire, homogène, du second ordre et à coefficients constants. On trouve qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

- On remplace dans l'équation différentielle et on trouve que $a = A$ et $b = -\frac{B}{2}$.
- On termine la résolution : comme $y' - y = Af_1 + Bf_2$, on a d'après la question précédente :

$$\left(y + Af_3 - \frac{B}{2}f_2\right)' - \left(y + Af_3 - \frac{B}{2}f_2\right) = 0$$

Donc la fonction $\tilde{y} : x \mapsto y(x) + Af_3(x) - \frac{B}{2}f_2(x)$ est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants $\tilde{y}' - \tilde{y} = 0$. On trouve finalement qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $y = Cf_1 - Af_3 + \frac{B}{2}f_2$. Nous venons de montrer l'inclusion $E \subset \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$. On montre facilement l'inclusion réciproque. Comme on sait que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E et qu'elle engendre E , c'est une base de E . En particulier, $\dim(E) = 3$.