

TD18 – CORRECTION

Exercice 1:

- Le plus simple est de donner un équivalent du terme général en $+\infty$: $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ d'où l'on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
- On sait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\frac{1}{n} \leq b_n \leq \frac{1}{n}$$

et on conclut que la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ de limite 0 avec le théorème des gendarmes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c_n = 1 + \frac{n}{2^n} = 1 + \frac{n}{e^{(n \ln 2)}}$ et on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^{(n \ln 2)}} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $d_n = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 - \frac{3 \ln(n)}{n}}$ et il suffit de connaître la limite du numérateur et du dénominateur pour conclure. Pour le numérateur, on utilise le théorème des gendarmes et pour le dénominateur, on utilise les croissances comparées. On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en factorisant le numérateur par 7^{n+1} et le dénominateur par 7^n :

$$e_n = 7 \times \frac{1 + \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{6}{7}\right)^n}$$

puis on utilise le résultat concernant les limites des suites géométriques (en invoquant bien le fait que $-1 < 6/7 < 1 \dots$). On conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 7$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n = n^2 \left(1 - \frac{\cos(n)}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$. On trouve la limite de $\cos(n)/n$ quand n tend vers $+\infty$ en utilisant le théorème des gendarmes. On trouve que le terme général dans la parenthèse tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = +\infty$.
- On utilise l'expression conjuguée : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$g_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

d'où l'on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \frac{1}{2}$.

- On distingue trois cas.

★ **Premier cas** : $a = b$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h_n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$.

★ **Deuxième cas** : $a > b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en factorisant par a^n ,

$$h_n = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

puis on utilise le résultat sur la convergence des suites géométriques (ici on a bien $-1 < b/a < 1$).
D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 1$

★ **Troisième cas** : $a < b$. On procède de la même manière mais on factorise cette fois par b^n . On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = -1$.

Exercice 2:

- On utilise l'expression conjuguée : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

puis on utilise le fait que $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ (conséquence de la croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur \mathbb{R}_+ et du fait que $n+1 \geq n \geq 0$).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on sait que $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. On somme ensuite sur les entiers $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on a une somme télescopique à traiter. On obtient :

$$u_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$$

Le théorème de comparaison permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3:

1. On montre que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est (strictement) décroissante en étudiant le signe des différences successives. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve que

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$$

2. Pour montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée, il suffit d'encadrer chacun des termes de la somme u_n . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad 0 \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$$

Il vient donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$ en sommant sur les entiers $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{n+1}{n} \leq 2$$

Finalement, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée. Il est important de ne pas se contenter de $u_n \leq \frac{n+1}{n}$ car un majorant ou un minorant ne doit pas dépendre de n .

3. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ étant décroissante et minorée par 0, elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Exercice 4: On étudie les suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = \cos(2\pi n^2) = 1$ donc $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite 1.

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n+1} = \cos\left(2\pi(n^2 + n) + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

par 2π -périodicité de la fonction cosinus et car $\cos(\pi/2) = 0$. Donc la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.

Les deux suites extraites de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 5:

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $k \leq t \leq k+1$ et comme la fonction inverse et décroissante sur \mathbb{R}_+^* , il vient $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. Puis on intègre ces inégalités entre k et $k+1$ par croissance de l'intégrale.
- (b) On somme les inégalités obtenues à la question précédente de $k = 1$ à $k = n-1$. Donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Or par la relation de Chasles : $\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^n = \ln(n)$. Donc en réutilisant l'inégalité :

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$$

donc $\frac{1}{n} + \ln(n) \leq h_n$. Pour l'autre inégalité, en faisant un changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) \Leftrightarrow 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n) \Leftrightarrow h_n \leq 1 + \ln(n)$$

D'où le résultat demandé.

- (c) **Attention** : on ne peut pas prendre un équivalent directement dans les inégalités, il faut se ramener au théorème des gendarmes. On divise, pour $n \geq 2$ par $\ln(n)$ dans les inégalités de la question 1. (b) ($\ln(n)$ est non nul et positif pour $n \geq 2$) et on trouve avec le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$. Donc $h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. (a) On reprend la question 1)a) pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

et en calculant l'intégrale : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) - \ln(n)$ on obtient le résultat voulu.

- (b) On montre que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n - d_n) = 0$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*$. $c_{n+1} - c_n = h_{n+1} - h_n + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0$ grâce à la question précédente. $d_{n+1} - d_n = c_{n+1} - c_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \ln(n) - \ln(n+1) + \frac{1}{n} \geq 0$ grâce à la question précédente. Il suffit pour la limite de remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n - d_n = \frac{1}{n}$.

- (c) On note γ la limite commune des deux suites $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Donc la suite $(h_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite γ . On vérifie alors que la suite de terme général $\varepsilon_n = h_n - \ln(n) - \gamma$ répond à la question.

Exercice 6:

- On utilise un raisonnement par récurrence simple. Pour l'hérédité, sous l'hypothèse de récurrence il est facile de montrer que $b_{n+1} > 0$ et que $a_{n+1} > 0$. Il suffit ensuite de trouver le signe de $a_{n+1} - b_{n+1}$: penser aux identités remarquables.
- On montre que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0$ grâce à la question précédente. Et $b_{n+1} - b_n = \frac{2a_n b_n - a_n b_n - b_n^2}{a_n + b_n} = \frac{b_n(a_n - b_n)}{a_n + b_n} \geq 0$ grâce à la question précédente.

Pour conclure qu'elles sont adjacentes, il faut montrer directement qu'elles sont convergentes et ont la même limite.

On sait que (a_n) est décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_0 = a$ donc $b_n \leq a$. Donc (b_n) est majorée. De la même façon (b_n) étant croissante on prouve que (a_n) est minorée par b . On utilise le théorème de la limite monotone pour établir les convergences (soit l et l' les limites respectives) puis on passe à la limite dans l'une des deux relations de récurrence. Par exemple on a $l = \frac{l+l'}{2}$ donc que $l = l'$. Donc les suites sont adjacentes.

Exercice 7:

- La suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ($s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$), la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1 ($t_{n+1} - t_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-n-1}{(n+1)!} \leq 0$ pour $n \geq 1$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - t_n) = 0$.
- En notant ℓ la limite commune des deux suites, on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{ak+b}{k!} = (a+b)\ell$$

En effet $\sum_{k=0}^n \frac{ak+b}{k!} = a \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} + b \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, par linéarité de la somme et en enlevant le premier terme de partie gauche qui est nul. Il suffit ensuite de faire un changement d'indice dans la somme de gauche et passer à la limite. *Remarque.* $\ell = e$.

Exercice 8: À chaque question, le terme général sera noté u_n .

1. On a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
2. On a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
3. En factorisant par n , on trouve que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
4. On a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
5. On a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
6. On a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} ne^{-n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ par croissances comparées.
7. On trouve que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

On a à chaque fois une forme indéterminée. On commence par écrire les termes généraux (tous notés u_n) sous forme exponentielle ($a^b = e^{b \ln(a)}$). Ensuite on cherche un équivalent du terme général dans l'exponentielle pour en déterminer la limite. Comme on peut composer les limites (**pas les équivalents !**), on trouve la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

8. On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
9. On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.
10. On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
11. On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^3$.
12. On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 9:

1. Il s'agit de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$. On trouve que la fonction f est croissante sur \mathbb{R}_+ et que $f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$.
2. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble décroissante et convergente vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f et de la droite d'équation $y = x$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x - \sqrt{1+x} = \frac{x^2 - x - 1}{x + \sqrt{1+x}}$ donc le signe de $x - \sqrt{1+x}$ est le même que celui de $x^2 - x - 1$. Il suffit d'étudier le signe de ce polynôme du second degré.
4. On utilise un raisonnement par récurrence simple. Tout repose sur la croissance de la fonction f et du fait que $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. L'initialisation est une simple vérification : $2 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $a_0 \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$. Pour l'hérédité, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $a_n \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$. Comme f est croissante et que $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a_n \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ implique que $a_{n+1} = f(a_n) \geq f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{1+a_n} - a_n \leq 0$$

car $a_n \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$ d'après la question 4.

6. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Si on note ℓ sa limite, alors en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $a_{n+1} = f(a_n)$, on trouve que $\ell = f(\ell)$ (la fonction f est continue sur son ensemble de définition). La résolution de cette équation fournit $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Finalement, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 10:

1. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$ (faire un tableau de variations).

- La suite $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ semble décroissante et la suite $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ semble croissante. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble divergente.
- On utilise un raisonnement par récurrence.
- Pour tout $x \in [0, 1]$, on trouve que $g(x) = x(x-1)(-x^2-x+1)$. Donc la fonction g est négative sur $\left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et positive sur $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right]$.
- Comme $x_0 \in \left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$, on a $x_{2n+2} - x_{2n} = g(x_{2n}) \leq 0$. Donc $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On trouve que la suite $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- En utilisant le théorème de la limite monotone, on trouve que les suites extraites sont convergentes. La limite de $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ doit appartenir à l'intervalle $\left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ tandis que la limite de $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ doit appartenir à l'intervalle $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right]$ (pour exclure $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ on utilise les variations des deux suites). On trouve ces limites en résolvant l'équation $g(x) = 0$. On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1} = 1$. Les suites extraites admettent des limites différentes donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 11:

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On encadre $1/\sqrt{n^2+2k}$ pour tout $k \in [1, n]$. On trouve que

$$\forall k \in [1, n], \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$

puis on somme ; on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$$

On cherche ensuite les limites des suites minorante/majorante et on utilise le théorème des gendarmes. Il vient finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

- On encadre $1/\sqrt{n^2+2k}$, pour tout $k \in [1, n^2]$. On montre ici que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est divergente de limite $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [1, n^2]$, on a $\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \geq \frac{1}{\sqrt{3n^2}}$, ce qui fournit en sommant sur les entier $k \in [1, n^2]$,

$$v_n \geq \frac{n}{\sqrt{3}}$$

d'où la limite annoncée.

- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [1, n]$, on sait que $[kx] \leq kx < [kx]+1$ donc $kx-1 \leq [kx] \leq kx$. On somme ces inégalités sur les entiers $k \in [1, n]$ et on utilise la linéarité de la somme et la valeur de $\sum_{k=1}^n k$; on obtient l'encadrement suivant :

$$\frac{n(n+1)x}{2n^2} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{n(n+1)x}{2n^2}$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{x}{2}$.

Exercice 12:

- On applique le théorème de la bijection à la fonction f_n sur l'intervalle $[0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est un polynôme et est donc dérivable sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1} + 1$ et donc pour tout $x \in [0, 1]$ $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$. D'autre part f est continue sur $[0, 1]$. Donc, d'après le théorème de la bijection, $f([0, 1]) = [-1, 1]$ et il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 1]$.

- On commence par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ (en effet $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^n + x - 1 - (x^{n+1} + x - 1) = x^n - x^{n+1} = x^n(1 - x) \geq 0$).
Comme $f_n(a_n) = 0$, on a donc $0 \geq f_{n+1}(a_n)$ et donc $f_{n+1}(a_{n+1}) \geq f_{n+1}(a_n)$ (car $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$).
Comme la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$, on a nécessairement $a_{n+1} \geq a_n$. Finalement, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente (de limite notée ℓ) d'après le théorème de la limite monotone. On a de plus $0 \leq \ell \leq 1$. Si $\ell \neq 1$, c'est-à-dire si $0 \leq \ell < 1$, alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = 0$ car $a_n^n = e^{n \ln(a_n)}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n) = \ln(\ell) < 0$. Donc en passant dans la limite dans l'égalité $f_n(a_n) = a_n^n + a_n - 1 = 0$, on trouve que $\ell = 1$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur ℓ . Donc $\ell = 1$.

Exercice 13:

- On utilise la théorème de la bijection à la fonction f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est la somme d'une fonction dérivable sur \mathbb{R}^+ et d'un quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^+ qui est donc dérivable sur \mathbb{R}^+ . Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f'_n(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x} > 0$$

Donc f_n est strictement croissante et continue sur \mathbb{R}^+ . $f(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$. Donc d'après le théorème de la bijection il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(x_n) = 0$ donc $e^{-x_n} = \frac{x_n - n}{x_n + n}$. On en déduit que

$$f_{n+1}(x_n) = \frac{x_n - (n+1)}{x_n + (n+1)} - \frac{x_n - n}{x_n + n} = \frac{-2x_n}{(x_n + n + 1)(x_n + n)} \leq 0$$

Donc $f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$ et comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , il vient $x_n \leq x_{n+1}$. Donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n(n) = e^{-n} < 0$. On a donc $n < x_n$. D'après le théorème de comparaison, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc divergente de limite $+\infty$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En partant de l'égalité $f_n(x_n) = 0$, on trouve que $x_n = \frac{n(1 + e^{-x_n})}{1 - e^{-x_n}}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-x_n} = 0$ donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Exercice 14: Partie A

- On montre à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n, 1 - u_n \in [0; 1]$.
- On déduit de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$. Puis par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 0,9^n u_0$.
- D'après le théorème des gendarmes, on trouve que la suite (u_n) converge vers 0. La modélisation mathématique nous indique que la population de tortue va disparaître.

4.

```

u=0.3
n=0
while u>0.03 :
    n=n+1
    u=0.9*u*(1-u)
print("l'espèce est menacée d'extinction après l'année ",2000+n-1)

```

Partie B

- En 2011, il y a environ 33 tortues
En 2012, il y a environ 34 tortues.

- ```

u=0.032
L=[]
for n in range(n) :
 u=0.9*u*(1-u)
 L.append(u)
print(L)

```

3. (a) On étudie le signe de  $g : x \mapsto f(x) - x$ .

On obtient le signe de  $g$  :

|        |   |          |   |
|--------|---|----------|---|
| $x$    | 0 | $\alpha$ | 1 |
| $g(x)$ |   | +        | - |

On étudie maintenant les variations de  $f$  sur  $[0; 1]$

|        |   |                  |   |
|--------|---|------------------|---|
| $x$    | 0 | $\frac{1}{2}$    | 1 |
| $f(x)$ | 0 | $\frac{1,06}{4}$ | 0 |

(b) Comme  $f(\alpha) = \alpha$ , on montre par récurrence que  $v_n \in [0; \alpha]$

(c) On en déduit que la suite  $(v_n)$  est croissante majorée. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

4. La suite  $(v_n)$  est une suite convergente notons  $l$  la limite de cette suite. La limite vérifie  $l = f(l)$ . On trouve  $l = \alpha$ .

5. Comme  $l \in [0.055, 0.06]$ , les tortues ne sont plus considérées en voie d'extinction.

**Exercice 15:**

**Partie A**

1. La fonction  $f$  est définie en tout nombre réel  $x$  tel que  $x^2 + x + 1 \neq 0$ . Le trinôme a un discriminant strictement négatif (égal à  $-3$ ) donc il est toujours strictement positif. On en déduit que le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et pour tout  $x \geq 0$ , on a

$$f'(x) = \frac{x^2 + x + 1 - x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1 + x}{(x^2 + x + 1)^2}(1 - x)$$

Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $\frac{1 + x}{(x^2 + x + 1)^2} \geq 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $1 - x$ . On en déduit le tableau de variation de  $f$  suivant :

|         |   |               |           |
|---------|---|---------------|-----------|
| $x$     | 0 | 1             | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +             | -         |
| $f(x)$  | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0         |

Pour tout  $x > 0$ , on a  $f(x) = \frac{x}{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

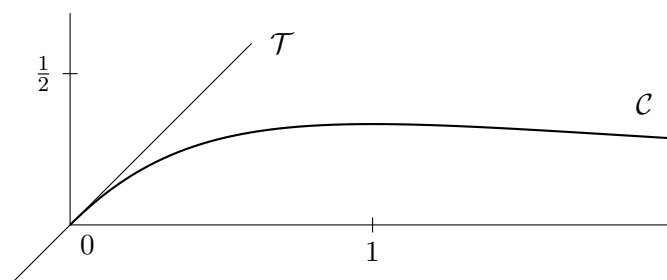
3. L'équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ , c'est-à-dire  $\mathcal{T} : y = x$ .

4. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . On résout :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{x}{x^2 + x + 1} = x \iff x = x(x^2 + x + 1) \\ &\iff x(x^2 + x + 1) - x = 0 \\ &\iff x(x^2 + x) \\ &\iff x^2(x + 1) = 0 \\ &\iff x \in \{-1, 0\} \end{aligned}$$

Donc  $f$  présente un unique point fixe sur  $\mathbb{R}_+$  qui est 0.

5. **Graphes de la fonction  $f$  et représentation des premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :**



### Partie B

1. (a) On utilise une fonction récursive.

```
def U(n) :
 if (n==0) :
 return 1
 else :
 return U(n-1)/(U(n-1)**2+U(n-1)+1)
```

(b) On utilise la fonction précédente.

```
def ListeTermes(N) :
 L=[]
 for k in range(N+1) :
 L.append(U(k)) # ou L=L+[U(k)]
 return L
```

2. On conjecture que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et convergente de limite 0.

3. On utilise un raisonnement par récurrence simple. Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : «  $0 < u_n \leq 1$  ».

★ **Initialisation.** Montrons que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie. On a  $u_0 = 1$  donc  $0 < u_0 \leq 1$ . Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

★ **Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que la proposition  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie. Montrons qu'alors la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. Comme  $u_n > 0$  par hypothèse de récurrence,  $u_{n+1} = f(u_n)$  est aussi strictement positif comme quotient de nombres réels strictement positifs. D'autre part,  $u_n \leq 1$  par hypothèse de récurrence donc  $f(u_n) \leq f(1)$  par croissance de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \leq \frac{1}{3} \leq 1$ . Finalement, la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

★ **Conclusion.** Pour tout entier naturel  $n$ , la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 < u_n \leq 1$ .

4. On sait que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n > 0$ . Par conséquent, les quotients successifs  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  sont bien définis et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n^2 + u_n + 1} \leq 1$$

car  $u_n^2 + u_n + 1 \geq 0^2 + 0 + 1$  (puisque  $u_n > 0$ ). Ainsi,  $u_{n+1} \leq u_n$  pour tout entier naturel  $n$ . Finalement,

la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

5. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 0 donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Notons  $\ell$  sa limite. Pour tout entier naturel  $n$ , on sait que  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et comme la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  (comme quotient de fonctions continues) et comme  $\ell \in \mathbb{R}_+$ , on a par composition des limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ . Ainsi, la limite  $\ell$  vérifie l'égalité  $f(\ell) = \ell$ . On en déduit donc que  $\ell$  est un point fixe de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $f$  a un unique point fixe sur  $\mathbb{R}_+$  (qui est 0), on a nécessairement  $\ell = 0$ . Finalement,

la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite 0.

### Partie C

1. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + 1} = \frac{p}{p^2 + p + 1}$$

Donc

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p+1} &= \frac{p}{p^2 + p + 1} - \frac{1}{p+1} = \frac{p(p+1) - (p^2 + p + 1)}{(p+1)(p^2 + p + 1)} \\ &= \frac{-1}{(p+1)(p^2 + p + 1)} \leq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$ .

2. On sait déjà que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n > 0$  (question 4. de la **partie B**). On utilise un raisonnement par récurrence simple pour démontrer la majoration. Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : «  $u_n \leq \frac{1}{n+1}$  ».

★ **Initialisation.** Montrons que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie. On sait que  $u_0 = 1$  et  $\frac{1}{0+1} = 1$ . Donc  $u_0 \leq \frac{1}{0+1}$  et la proposition  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

★ **Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons qu'alors la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. Par hypothèse de récurrence, on a  $u_n \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$  et comme la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on a  $f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ . Or  $f(u_n) = u_{n+1}$  et d'après la question précédente, on a  $f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$ . D'où  $u_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$ . Finalement, la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

★ **Conclusion.** Pour tout entier naturel  $n$ , la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, notons  $\mathcal{P}(n)$  la proposition

$$\left\langle \frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right\rangle$$

★ **Initialisation.** Montrons que  $\mathcal{P}(1)$  est vraie. D'une part  $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{3}$  et d'autre part  $1 + 1 + \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 2 + 1 = 3$ . On a bien  $\frac{1}{3} \leq 3$  donc la proposition  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

★ **Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons qu'alors la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{f(u_n)} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$$

Comme la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie et comme d'après la question précédente  $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ , on a la majoration

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq n+1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}$$

c'est-à-dire  $\frac{1}{u_{n+1}} \leq n+2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$  en utilisant la relation de Chasles. Finalement, la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

★ **Conclusion.** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $\frac{1}{u_n} \leq n+1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

4. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t \in [k, k+1]$ , on a  $k \leq t \leq k+1$  puis, en passant à l'inverse,  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ . Par croissance de l'intégrale (les bornes sont *dans le bon sens* :  $k \leq k+1$ ), on obtient

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$$

Mais  $\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} = \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} 1 dt = \frac{k+1-k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$  et de la même façon  $\int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$ . Finalement,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En sommant les inégalités  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$  sur les entiers  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \tag{*}$$

Or, d'après la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \left[ \ln(t) \right]_1^n = \ln(n)$$

De plus, le changement d'indice  $\ell = k+1$  nous donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{\ell=2}^n \frac{1}{\ell} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1$$

L'inégalité (\*) se réécrit alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n) \quad \text{puis} \quad \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)}$$

ce qu'il fallait démontrer.

6. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- La minoration cherchée de  $\frac{1}{u_n}$  résulte immédiatement de la question 2. de la **Partie C**. En effet, puisque  $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$ , on obtient en passant à l'inverse :  $\frac{1}{u_n} \geq n+1$ .
- Pour la majoration, nous commençons par écrire que (question 3. de la **Partie C**) :

$$\frac{1}{u_n} \leq n+1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Mais d'après la question 4. de la **Partie C**, on a la majoration  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$ . Par conséquent,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + 1 + \ln(n) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n + 1 \leq \frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)}$$

7. D'après la question précédente, on a pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$\frac{1}{n + 2 + \ln(n)} \leq u_n \leq \frac{1}{n + 1}$$

ce qui donne, en divisant par  $1/n$  (ce qui revient à multiplier par  $n$ ) :

$$\frac{n}{n + 2 + \ln(n)} \leq \frac{u_n}{\frac{1}{n}} \leq \frac{n}{n + 1}$$

Mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + 2 + \ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{\ln(n)}{n}} = 1$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$  et car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$  (par croissances comparées). De la même manière  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + 1} = 1$ . Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$  et donc

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$