TD18 – Correction

Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice 1:

1. $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 14x+2y & 10x-10y \\ 20y & 16x+12y \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} -15 & 14 \\ -12 & 17 \\ -20 & 63 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -6 & 5 & -8 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2:

On a $A \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ et $E \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. Si S et T sont deux matrices, on sait qu'on peut faire le produit matriciel ST si S a autant de colonnes que T a de lignes. On peut ici faire les produits matriciels BA, BC, CD, CE, DE, EA, EB , EC, DD et BB.

Exercice 3:

1. Pour que l'équation $AX = B$ soit compatible, il faut que $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Posons donc $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{pmatrix}$.

   On raisonne par équivalences : on a

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2t & = & -1 \\ 3x & + & 4t & = & -3 \\ y & + & 2u & = & 5 \\ 3y & + & 4u & = & 11 \\ z & + & 2v & = & 0 \\ 3z & + & 4v & = & -2 \end{array} \right.$$

   Les deux premières équations fournissent un système de deux équations en les deux inconnues x et t (on trouve $x = -1$ et $t = 0$). Les deux suivantes forment un système en les deux inconnues y et u (on trouve $y = 1$ et $u = 2$) et de même pour les deux dernières équations fournissent $z = -2$ et $v = 1$. On résout chacun d'entre eux séparément. On trouve à chaque fois un unique couple solution. On conclut que l'équation matricielle a une unique solution : la matrice $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. Pour une matrice X telle que le produit matriciel XA est compatible (c'est-à-dire que X a deux colonnes), le résultat est une matrice ayant deux colonnes.

   Comme la matrice B en a trois, $\boxed{\text{l'équation n'a pas de solution.}}$

Exercice 4:

(S_1) a pour écriture matricielle associée $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

S_2 a pour écriture matricielle associée $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

S_3 a pour écriture matricielle associée $\begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Exercice 5:

On a ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ${}^tC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et ${}^tD = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6:

1. Pour la matrice A : on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^4 = 0_{\mathcal{M}_4}$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, A^n = A^4 \times A^{n-4} = 0_{\mathcal{M}_4}$
2. Pour la matrice B : on trouve $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, puis $B^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ce qui permet de conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = 2^{n-1}B$; conjecture que l'on démontre proprement à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
3. Pour la matrice C : On sait que $\boxed{C^0 = I_3}$ (c'est vraie pour toute matrice). On trouve $C^2 = 3C$, puis $C^3 = C^2C = 3C^2 = 9C$. On conjecture donc que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } C^n = 3^{n-1}C}$. Il faut démontrer ce résultat par récurrence ($\mathcal{P}_n$: « $C^n = 3^{n-1}C$ » pour $n \geq 1$).
4. Pour la matrice D : on trouve $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ puis $D^3 = D$. Ensuite $D^4 = DD^3 = DD = D^2$, ... On montre à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^{2n} = D^2$ et $D^{2n-1} = D$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $D^{2n} = D^2$ et $D^{2n-1} = D$ ». Inutile de faire deux récurrences, les deux propriétés peuvent être traitées en même temps !

Exercice 7:

1. $det(A) = 62 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{62} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$
2. $det(B) = -7 \neq 0$ donc B est inversible et $B^{-1} = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
3. $det(C) = 0$ donc C n'est pas inversible.
4. $det(D) = 1 \neq 0$ donc B est inversible et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8:

Pour chacune de ces matrices, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

La matrice A est inversible si et seulement si le système associé $AX = Y$ est un système de Cramer.

Ainsi pour chacune des matrices suivantes, on échelonne le système associé. Si le système est de Cramer, la matrice est inversible et l'unique solution du système de Cramer nous fournit les coefficients de la matrice inverse.

Si le système n'est pas de Cramer alors la matrice n'est pas inversible.

1. On obtient un système de Cramer pour le système associé à la matrice A et on en déduit :
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. On obtient un système de rang 2 donc la matrice B n'est pas inversible.
3. On obtient un système de Cramer pour le système associé à la matrice C et on en déduit :
$C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. On obtient un système de Cramer pour le système associé à la matrice D et on en déduit :
$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

Exercice 9:

1. On trouve $A^3 = -I_3$. On a donc $-A^3 = I_3$ et donc $A(-A^2) = (-A^2)A = I_3$.
La matrice $\boxed{A \text{ est donc inversible d'inverse } -A^2.}$
2. On trouve $B^3 = 2B$. Pour montrer que la matrice B n'est pas inversible, on raisonne par l'absurde. Supposons que B soit inversible. Alors B^{-1} existe en en multipliant à gauche par B^{-1} dans l'égalité précédente, on obtient $B^{-1}B^3 = 2B^{-1}B$, soit $B^2 = 2I_2$, ce qui est absurde (voir le calcul de B^2).
3. On trouve $C^3 - 4C^2 + C + 6I_3 = 0_3$. On a donc $C^3 - 4C^2 + C = -6I_3$ donc $C(C^2 - 4C + I_3) = -6I_3$, ce qui donne, en divisant par -6 : $C(-\frac{1}{6}[C^2 - 4C + I_3]) = I_3$. On vérifie que $(-\frac{1}{6}[C^2 - 4C + I_3])C = I_3$. Donc la matrice C est inversible d'inverse $-\frac{1}{6}[C^2 - 4C + I_3]$.
4. On suppose que $a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_k = 0_k$.
On a donc $a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A = -a_0I_k$.
Donc $A(a_nA^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_k) = -a_0I_k$.
Or $a_0 \neq 0$ donc on peut diviser par $-a_0$:
$$A\left(-\frac{1}{a_0}\left[a_nA^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_k\right]\right) = I_k$$
On vérifie qu'on a aussi $\left(-\frac{1}{a_0}\left[a_nA^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_k\right]\right)A = I_k$. La matrice A est donc inversible d'inverse la matrice $-\frac{1}{a_0}\left(a_nA^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_k\right)$.

Exercice 10:

- ⋆ **Cas de la matrice M :** on fait des opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) de M pour obtenir une matrice échelonnée.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & -2-\lambda & 3 \\ 3-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & \lambda(1-\lambda) & 3(\lambda-1) \\ 0 & 2(\lambda-1) & 3(1-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - (3-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 2(\lambda-1) & 3(1-\lambda) \\ 0 & \lambda(1-\lambda) & 3(\lambda-1) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 2(\lambda-1) & 3(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 3(\lambda-1)(2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + \lambda L_2 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Donc la matrice M n'est pas inversible si et seulement si son rang n'est pas maximal (égal à 3). Donc

$$\begin{aligned}(\text{la matrice } M \text{ n'est pas inversible}) &\iff 2(\lambda-1)=0 \text{ ou } 3(\lambda-1)(2-\lambda)=0\\ &\iff \lambda=1 \text{ ou } \lambda=2\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{M \text{ n'est pas inversible si et seulement si } \lambda \in \{1,2\}.}$

⋆ **Cas de la matrice R :** en procédant de la même manière, on trouve que la matrice R n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{-2,-1,1\}$. En effet, si on choisit la deuxième ligne comme pivot, on peut échelonner la matrice R comme suit :

$$\operatorname{rg}(R) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3-\lambda & -8 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda+1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

Exercice 11:

1. $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

   On a $N^0 = I_3, N^1 = N, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_{\mathcal{M}_3}$.

   On en déduit $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 3, N^k = N^3 \times N^{k-3} = 0_{\mathcal{M}_3}$.

   N et I_3 commutent donc on peut utiliser le binôme de Newton.

   $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:

   $A^n = (N+I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k}$

   $A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k$

   $A^n = \binom{n}{0}N^0 + \binom{n}{1}N^1 + \binom{n}{2}N^2$

   Ainsi $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n & \frac{9}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

   On a par ailleurs $A^0 = I_3, A^1 = A$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

   On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n & \frac{9}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $R = 2J - I_3$. On a déjà vu que $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Les matrices $2J$ et I_3 commutent (il n'y a pas de calcul à faire : la matrice identité commute avec toute matrice) donc les matrices $2J$ et $-I_3$ commutent. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} R^n = (2J-I_3)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2J)^k(-I_3)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}2^kJ^k \\ &= (-1)^nI_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}2^k3^{k-1}J \\ &= (-1)^nI_3 + \left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}2^k3^{k-1}\right]J \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}2^k3^{k-1} &= \frac{(-1)^n}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-6)^k\\ &= \frac{(-1)^n}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-6)^k-1\right]\\ &= \frac{(-1)^n}{3}\left[(1-6)^n-1\right]\\ &= \frac{5^n+(-1)^{n+1}}{3}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{R^n=(-1)^nI_3+\frac{5^n+(-1)^{n+1}}{3}J}$$

Je me perfectionne !

Exercice 12:

1. D'abord $A^0=I_2$. On calcule $A^2=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}4&-4\\-4&4\end{pmatrix}$ (pour se faire une idée) et on conjecture que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&-2^{n-1}\\-2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

On le démontre ensuite *proprement* en utilisant un raisonnement par récurrence (en n'oubliant pas de d'écrire la propriété $\mathcal{P}_n$ que l'on veut démontrer, à partir du rang 1 !).

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Le système proposé s'écrit encore matriciellement

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\boxed{X_{n+1}=AX_n}$.

(b) Il s'agit de démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $X_n=A^nX_0$; cette égalité serait notre propriété $\mathcal{P}_n$ (l'initialisation ne pose pas de problème puisque $A^0=I_3$ et $I_3X_0=X_0$; quant à l'hérédité, elle repose simplement sur le fait que $A\times A^n=A^{n+1}$).

(c) Pour conclure, on développe le produit matriciel A^nX_0 et on trouve que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \begin{cases}x_n=2^{n-1}(x_0-y_0)\\ y_n=2^{n-1}(y_0-x_0)\end{cases}}$$

Exercice 13:

1. (a) D'après les données de l'énoncé, on a $\forall k\in\mathbb{N}, n_1(k+1)=4n_3(k), n_2(k+1)=\frac{1}{2}n_1(k)$ et $n_3(k+1)=\frac{1}{2}n_2(k)$

(b) Les équations précédentes s'écrivent matriciellement :

$\forall k\in\mathbb{N}, X_{k+1}=\begin{pmatrix}0&0&4\\\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}X_k$. On peut donc poser $A=\begin{pmatrix}0&0&4\\\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$

(c) On montre par récurrence simple que $\forall k\in\mathbb{N}$, la proposition P_k : " $X_k=A^kX_0$ " est vraie.

(d) on trouve $A^0=I_3, A^1=A, A^2=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\\frac{1}{4}&0&0\end{pmatrix}$ et $A^3=I_3$.

Donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A^{3k}=\left(A^3\right)^k=I_3^k=I_3$, $A^{3k+1}=A^{3k}A=A$ et $A^{3k+2}=A^{3k}A^2=A^2$.
On aurait aussi pu le montrer par récurrence (mais c'est plus long).

(e) on a $X_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

Au bout de 15 ans, on aura $X_{15} = A^{15}X_0 = I_3X_0 = X_0$

On aura donc 20 rongeurs d'un an, 20 rongeurs de 2 ans et 10 rongeurs de 3 ans soit un total de 50 animaux.

Au bout de 16 ans, on aura $X_{16} = A^{16}X_0 = AX_0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

On aura donc 40 rongeurs d'un an, 10 rongeurs de 2 ans et 10 rongeurs de 3 ans soit un total de 60 animaux.

Au bout de 17 ans, on aura $X_{17} = A^{17}X_0 = A^2X_0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$

On aura donc 40 rongeurs d'un an, 20 rongeurs de 2 ans et 5 rongeurs de 3 ans soit un total de 65 animaux.

Au bout de 18 ans, on aura $X_{18} = A^{18}X_0 = I_3X_0 = X_0$

On aura donc 20 rongeurs d'un an, 20 rongeurs de 2 ans et 10 rongeurs de 3 ans soit un total de 50 animaux.

La population de rongeurs reste stable et cyclique. On enchaine des cycle de 3 ans avec successivement 50, 60 et 65 animaux.

2. (a) D'après les données de l'énoncé, on a $\forall k \in \mathbb{N}, n_1(k+1) = 2n_3(k), n_2(k+1) = \frac{1}{2}n_1(k)$ et $n_3(k+1) = \frac{1}{2}n_2(k)$

(b) Les équations précédentes s'écrivent matriciellement :

$\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} X_k$. On peut donc poser $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

(c) On montre par récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N}$, la proposition P_k : "$X_k = A^kX_0$" est vraie.

(d) on trouve $A^0 = I_3, A^1 = A, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \frac{1}{2}I_3$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{3k} = \left(A^3\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k I_3^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k I_3$, $A^{3k+1} = A^{3k}A = \left(\frac{1}{2}\right)^k A$ et $A^{3k+2} = A^{3k}A^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^k A^2$.

On aurait aussi pu le montrer par récurrence (mais c'est plus long).

(e) on a $X_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$

Au bout de 5 ans, on aura $X_5 = A^5X_0 = \frac{1}{2}A^2X_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \\ 25 \end{pmatrix}$

On aura donc 50 rongeurs d'un an, 75 rongeurs de 2 ans et 25 rongeurs de 3 ans soit un total de 150 animaux.

Au bout de 6 ans, on aura $X_6 = A^6X_0 = (\frac{1}{2})^2I_3X_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 37,5 \end{pmatrix}$

On aura donc 50 rongeurs d'un an, 25 rongeurs de 2 ans et 37,5rongeurs de 3 ans soit un total de 112,5 animaux.

Au bout de 7 ans, on aura $X_7 = A^7X_0 = (\frac{1}{2})^2AX_0 = \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \\ 12,5 \end{pmatrix}$

On aura donc 75 rongeurs d'un an, 25 rongeurs de 2 ans et 12,5 rongeurs de 3 ans soit un total de 112,25 animaux.

Au bout de 15 ans, on aura $X_{15} = A^{15}X_0 = (\frac{1}{2})^5I_3X_0 = \begin{pmatrix} 6,25 \\ 3,125 \\ 4,6875 \end{pmatrix}$

Au bout de 15 ans, il reste donc environ 14 animaux. On est en situation d'extinction progressive de population.

Exercice 14:

1. $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $x_1(k+1) = 8x_2(k)$ et $x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k)$ d'où $X_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} X_k$

   On peut donc poser $B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
2. On montre par récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = B^n X_0$.
3. $B - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 8 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}$ Or $det(B - \lambda I_2) = 4 - \lambda^2$. Une matrice 2×2 n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul. Donc $B - \lambda I_2$ n'est pas inversible pour $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 2$. On a donc $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. $det(P) = -8 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{-8} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$
5. $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{-8} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = B$
6. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = PD^nP^{-1}X_0$. (pour l'hérédité on utilise la question précédente)
7. On a $X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Ainsi $X_{10} = PD^{10}P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 5 \times 2^{10} \\ 2^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5120 \\ 2048 \end{pmatrix}$.

   10 ans plus tard il y aura donc 7168 insectes !

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice 15:

1. $Rg(P - \lambda I_3) = Rg\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_3$

   $Rg(P - \lambda I_3) = Rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{array}$

   $Rg(P - \lambda I_3) = Rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda(-\lambda+2) \end{pmatrix}$

   - <u>Si $\lambda = 1$ alors</u> :

     $Rg(P - \lambda I_3) = Rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

   - <u>Si $\lambda \neq 1$ alors</u> :

     $Rg(P - \lambda I_3) = Rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda(-\lambda+2) \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

     $Rg(P - \lambda I_3) = Rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 + \lambda - 1 \end{pmatrix}$

$-\lambda^2+\lambda-1$ admet comme racines $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Si $\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\lambda=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, alors $Rg(P-\lambda I_3)=2$
Dans tous les autres cas, $Rg(P-\lambda I_3)=3$

Finalement : $\boxed{Rg(P-\lambda I_3)=\begin{cases}2 & \text{si } \lambda\in\{1,\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\}\\ 3 & \text{sinon}\end{cases}}$

2.
```
def suites(n):
    u,v,w=1,0,0     #initialisations
    for k in range(n):
        u,v,w = 3*u-v+w, u+2*v,v+w     # formules de récurrence
    return u,v,w
```

3.
```
def SommeTableau(M):
    n=len(M)   #nombre de lignes
    p=len(M[0])   #nombre de colonnes
    S=0   #initialisation de la somme
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            S=S + M[i][j]
    return S
```

4. (a) $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$AX_n=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3u_n-v_n+w_n\\u_n+2v_n\\v_n+w_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{pmatrix}=X_{n+1}$$

Ainsi $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, X_{n+1}=AX_n}$

(b) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, X_n=A^nX_0$

<u>Initialisation pour $n=0$:</u>

$A^0X_0=I_3X_0=X_0$ donc la propriété est vraie au premier rang.

<u>Hérédité :</u>

Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé.

On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$, c'est à dire que $X_{n+1}=A^{n+1}X_0$.

D'après notre hypoyhèse de récurrence :

$X_n=A^nX_0$

En multipliant par A à gauche dans les deux membres, on a :

$AX_n=AA^nX_0$

soit $X_{n+1}=A^{n+1}X_0$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$

D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, X_n=A^nX_0}$

5. Posons $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

P est inversible $\Leftrightarrow PX=B$ donne un système de Cramer.

$$PX=B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} & & y & & & = & a & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x & & & + & z & = & b & \\ x & - & y & + & 2z & = & c & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 2z & = & c & L_1 \\ x & & & + & z & = & b & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & y & & & = & a & L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 2z & = & c & L_1 \\ & & y & - & z & = & b-c & L_2 \\ & & y & & & = & a & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & 2z & = & c & L_1 \\ & & y & - & z & = & b-c & \\ & & & & z & = & a-b+c & \end{array}\right.$$

Ce système est carré de rang maximal 3 donc c'est un système de Cramer et P est inversible. Finissons de résoudre le système pour obtenir les coefficient de P^{-1}.

$$PX=B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-a+2b-c \\ y=a \\ z=a-b+c \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

6. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=T$

   Ainsi $\boxed{P^{-1}AP=T}$

7. (a) Il suffit de poser $\boxed{N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

   (b) on a $N^0=I_3$
   $N^1=N$
   $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   $N^3=O_3$
   $\forall k\in\mathbb{N}, k\geq 3, N^k=N^3\times N^{k-3}=O_3\times N^{k-3}=O_3$
   Ainsi :
   $$\boxed{N^0=I_3,\ N^1=N,\ N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \forall k\in\mathbb{N}, k\geq 3, N^k=O_3}$$

   (c) Les matrices $2I_3$ et N commutent donc on peux utiliser la formule du binôme de Newton sur les matrices :
   $T^n=(N+2I_3)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k(2I_3)^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}N^k$

$T^n = \sum\limits_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k$

$T^n = \sum\limits_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k + O_3$

$T^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}N + n(n-1)2^{n-3}N^2$

Ainsi $\boxed{T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$

8. (a) D'après la question 6, on a $T = P^{-1}AP$

   En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient :

   $\boxed{A = PTP^{-1}}$

   Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$

   <u>Initialisation pour $n = 0$:</u>

   $A^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$ donc la propriété est vraie au premier rang.

   <u>Hérédité :</u>

   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

   On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$, c'est à dire que $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$.

   D'après notre hypoyhèse de récurrence :

   $A^n = PT^nP^{-1}$

   En multipliant par A à droite dans les deux membres, on a :

   $A^{n+1} = PT^nP^{-1}A$

   soit $A^{n+1} = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$

   Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$:

   $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   $\boxed{A^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8+4n & -4n & 4n \\ n^2+3n & -n^2+n+8 & n^2-n \\ n^2-n & -n^2+5n & n^2-5n+8 \end{pmatrix}}$

   (c) D'après la question 4, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$

   ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8+4n & -4n & 4n \\ n^2+3n & -n^2+n+8 & n^2-n \\ n^2-n & -n^2+5n & n^2-5n+8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   On en déduit :

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n-3}(8+4n), v_n = 2^{n-3}(n^2+3n), w_n = 2^{n-3}(n^2-n)}$

Exercice 16:

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $U_{n+1} = AU_n$. On a suite, il vient

$$AU_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} + u_{n+1} - u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

   où l'avant-dernière égalité provient de la relation de récurrence vérifiée par notre suite. Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n}$.

   (b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^nU_0$ à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition « $U_n = A^nU_0$ ».

- ⋆ **Initialisation :** montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie. On a $A^0U_0 = I_3U_0 = U_0$ donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- ⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie et montrons que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie. D'après la question 1. (a), on a $U_{n+1} = AU_n$ et comme la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie, $U_n = A^nU_0$. Donc $U_{n+1} = AU_n = AA^nU_0 = A^{n+1}U_0$. Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- ⋆ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ par principe de récurrence.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } U_n = A^nU_0}$.

2. (a) Déterminons la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & u \\ y & b & v \end{pmatrix}$ telle que $AP = PB$. On commence par calculer les deux produits matriciels. On a

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & u \\ y & b & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x-y & 1+a-b & 1+u-v \\ 1 & 1 & 1 \\ x & a & u \end{pmatrix}$$

et comme $B = D + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a

$$PB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & u \\ y & b & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & x+a & -u \\ y & y+b & -v \end{pmatrix}$$

Or deux matrices de même taille sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients. Donc $AP = PB$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{c} 1+x-y=1 \\ 1+a-b=2 \\ 1+u-v=-1 \\ x=1 \\ x+a=1 \\ -u=1 \\ y=x \\ y+b=a \\ u=-v \end{array} \right.$$

Les 4ème et 7ème équations fournissent les valeurs de x et y : $x = y = 1$ (et ces valeurs vérifient aussi la 1ère équation). Les 2ème et 5ème équations nous donnes a et b : $a = 0$ et $b = -1$ (et ces valeurs vérifient la 8ème équation). Enfin, les 6ème et 9ème équations fournissent u et v : $u = -1$ et $v = 1$ (et ces valeurs vérifient la 3ème équation). Finalement,

$$\boxed{\text{la matrice } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est telle que } AP = PB}$$

(b) Montrons que P est inversible et déterminons la matrice P^{-1}. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation matricielle $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} x&+&y&+&z&=&X & \mathrm{L}_1\\ x&&&-&z&=&Y & \mathrm{L}_2\\ x&-&y&+&z&=&Z & \mathrm{L}_3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} x&+&y&+&z&=&X & \mathrm{L}_1\\ &-&y&-&2z&=&Y-X & \mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1\\ &-&2y&&&=&Z-X & \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} x&+&y&+&z&=&X & \mathrm{L}_1\\ &&y&+&2z&=&X-Y & \mathrm{L}_2\leftarrow -\mathrm{L}_2\\ &&&&4z&=&Z+X-2Y & \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3-2\mathrm{L}_2\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x&=&\frac{1}{4}X+\frac{1}{2}Y+\frac{1}{4}Z\\ y&=&\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}Z\\ z&=&\frac{1}{4}X-\frac{1}{2}Y+\frac{1}{4}Z\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$$

Finalement,

$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}}$$

(c) Montrons que $A=PBP^{-1}$. On sait que $AP=PB$. Or la matrice P est inversible donc, en composant par P^{-1} à droite, il vient $(AP)P^{-1}=(PB)P^{-1}$ et donc, par associativité du produit scalaire, $A(PP^{-1})=PBP^{-1}$ soit $AI_3=A=PBP^{-1}$. Finalement, $\boxed{A=PBP^{-1}}$.

(d) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $A^n=PB^nP^{-1}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n=PB^nP^{-1}$ ».

- ⋆ **Initialisation :** montrons que la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie. On a

$$PB^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3=A^0$$

Donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- ⋆ **Hérédité :** soit $n\in\mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie et montrons que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a $A^{n+1}=AA^n$. Par hypothèse de récurrence, on a $A^n=PB^nP^{-1}$ et on sait que $A=PBP^{-1}$ (d'après la question 1. (c)) donc

$$\begin{aligned} A^{n+1}&=(PBP^{-1})(PB^nP^{-1})\\ &=PB\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}B^nP^{-1} \quad \text{(par associativité du produit matriciel)}\\ &=PBI_3B^nP^{-1}\\ &=PBB^nP^{-1}\\ &=PB^{n+1}P^{-1}\end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- ⋆ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ on a } A^n=PB^nP^{-1}.}$

3. (a) Calculons N^k pour tout entier naturel k.On a $\boxed{N^2=0_3}$. On en déduit donc que si $k\geq 2$, alors $N^k=N^2N^{k-2}=0_3N^{k-2}=0_3$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad N^k=\left\{\begin{array}{ll} I_3 & \text{si } k=0\\ N & \text{si } k=1\\ 0_3 & \text{si } k\geq 2\end{array}\right.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons l'expression de B^n en fonction de n. Si $n = 0$, alors $B^n = I_3$ et si $n = 1$, alors $B^n = B = D + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit maintenant $n \geq 2$. On sait que $B = D + N$ donc $B^n = (D + N)^n$. Montrons que les matrices D et N commutent. On a

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

et

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

Donc les matrices D et N commutent. On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton et on a

$$\begin{aligned} B^n = (N + D)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0_3} D^{n-k} \\ &= D^n + nND^{n-1} + 0_3 \\ &= D^n + nND^{n-1} \end{aligned}$$

Comme la matrice D est diagonale (on a $D = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$), on a $D^{n-1} = \mathrm{diag}(1^{n-1}, 1^{n-1}, (-1)^{n-1}) = \mathrm{diag}(1, 1, (-1)^{n-1})$ et $D^n = \mathrm{diag}(1, 1, (-1)^n)$. On a donc

$$\begin{aligned} B^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que cette égalité reste vraie pour $n \in \{0, 1\}$. On en conclut donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}}$$

(c) Déterminons l'expression de U_n en fonction de n. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1. (b), on a $U_n = A^n U_0$. Or, d'après la question 2. (d), $A^n = PB^nP^{-1}$ et d'après la question 3. (b), $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. En utilisant les expressions des matrices P et P^{-1} obtenues dans les questions 2. (a) et 2. (b), il vient

$$\begin{aligned}
U_n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & (-1)^n \\ 1 & n & (-1)^{n+1} \\ 1 & n-1 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2n+3+(-1)^n}{4} & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{-2n-1+(-1)^n}{4} \\ \frac{2n+1+(-1)^{n+1}}{4} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{-2n+1+(-1)^{n+1}}{4} \\ \frac{2n-1+(-1)^n}{4} & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{-2n+3+(-1)^n}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{U_n = \begin{pmatrix} \frac{-2n-1-3(-1)^n}{4} \\ \frac{-2n+1-3(-1)^{n+1}}{4} \\ \frac{-2n+3-3(-1)^n}{4} \end{pmatrix}}$. Comme $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, on obtient

$$\boxed{u_n = \frac{-2n+3-3(-1)^n}{4} = -\frac{n}{2} + \frac{3}{4}\left(1+(-1)^{n+1}\right)}$$