Chapitre 23

Continuité

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction à valeurs réelles dont le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est un intervalle I de $\mathbb{R}$.

I Continuité en un point

1) Définition

Définition :
Soit $x_0 \in I$.

- ⋆ On dit que la fonction f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- ⋆ Si f n'est pas continue en x_0, on dit aussi qu'elle est discontinue en ce point.

Exemple:

- La fonction $f : x \longmapsto x^2 + 1$ est continue en 1. En effet, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 + 1\right) = 2 = f(1)$.
- La fonction partie entière n'est pas continue en 0. En effet, les limites en 0^- et en 0^+ sont différentes donc cette fonction n'admet pas de limite en 0.

Exercice 1 : Etudier la continuité en 1 de la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 0,\ x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Remarque : On ne parle de continuité en x_0 que si f est définie en x_0.

2) Continuité à droite et à gauche en un point

Lorsque la fonction f se comporte de deux manières différentes à droite et à gauche de $x_0 \in I$, on doit regarder la continuité de f à droite et à gauche de x_0.

Définition :
Soit $x_0 \in I$ (on suppose que x_0 n'est pas une borne de I).

- On dit que la fonction f est continue à gauche en x_0 si
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$
- On dit que la fonction f est continue à droite en x_0 si
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Exercice 2 :

1. Etudier la continuité en 0^+ de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. Etudier de la continuité à gauche et à droite en 0 de la fonction partie entière.

3) Lien avec la continuité

Propriétés :
Soit $x \in \mathcal{D}_f$ (on suppose que x_0 n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$). Alors

$$\begin{aligned} & f \text{ est continue en } x_0 \\ \iff & \begin{cases} f \text{ est continue à gauche en } x_0 \\ f \text{ est continue à droite en } x_0 \end{cases} \\ \iff & \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{aligned}$$

Exercice 3 : Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

1. $s(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
3. $g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

II Continuité sur un intervalle

1) Définition

Définition :

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I.
- Soit D un ensemble. f est continue sur D si f est continue sur tout intervalle $I \subset D$ non réduit à un point.

Remarque : Une fonction f est dite continue sur un intervalle si sa représentation graphique ne présente pas de sauts verticaux.

Notation. L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou plus simplement $\mathcal{C}(I)$.

2) Continuité des fonctions usuelles

En utilisant la définition, on montre facilement que les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition (sauf la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$).

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions cosinus $x \longmapsto \cos x$ et sinus $x \longmapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction tangente $x \longmapsto \tan x$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.
- La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière $\lfloor \cdot \rfloor$ n'est pas continue en tout point de $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

3) Continuité et opérations algébriques

Propriétés :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f et g deux élements de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et λ un nombre réel. Alors :

- $f + g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
- $\lambda f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
- $f \times g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
- **si la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors** $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

Exemple:

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{(2\,\mathrm{e}^x + 5)\ln(x)}{x + 1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et quotient de fonctions qui le sont.

4) Continuité et composition

Propriétés :
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si

1. $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
2. $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$
3. **et** $f(I) \subset J$

alors la fonction composée $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I. Autrement dit, $g \circ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Exercice 4 : Déterminer le domaine de définition et de continuité de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$
2. $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}$
3. $h(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{-x^3} + 4\right)$
4. $i(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

III Prolongement par continuité

On suppose maintenant que la fonction f est définie et continue sur une intervalle I de $\mathbb{R}$ sauf en un point x_0. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = I \setminus \{x_0\}$. On se demande s'il est possible de *prolonger* la fonction f en une fonction continue sur tout l'intervalle I. Par exemple, considérons la fonction *sinus cardinal* f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Peut-on prolonger la fonction f en 0 afin d'obtenir une fonction continue sur $\mathbb{R}$? (ici $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ et $x_0 = 0$)

Propriétés :
[prolongement par continuité en un point] Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, I un intervalle contenant x_0 et $f : I \setminus \{x_0\} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction. Si

- **f n'est pas définie en x_0**
- **f est continue sur $I \setminus \{x_0\}$.**
- **f admet une limite finie ℓ en x_0,**

alors la fonction

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

est continue sur I et s'appelle le prolongement par continuité de la fonction f en x_0. Par abus de notation, on note encore ce prolongement f (au lieu de $\tilde{f}$).

Exemple:
On peut prolonger la fonction sinus cardinal f en 0 en posant $f(0) = 1$.

Exercice 5 :

Étudier les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes :

1. $k : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$
2. $j : x \longmapsto x\cos(\dfrac{1}{x^2})$
3. $f : x \longmapsto \begin{cases} \sin x & \text{si } x > 0 \\ \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
4. $g : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ 1 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
5. $h : x \longmapsto \sin(x+1)\ln|x+1|$ en -1.

Remarque :
On peut également étudier le prolongement par continuité d'une fonction en x_0 seulement à droite ou à gauche.

Exercice 6 :

1. Prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $f : x \longmapsto x^x$.
2. Prolonger par continuité sur $[-1, +\infty[$ la fonction : $g : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}}$.

IV Théorème des valeurs intermédiaires

1) Théorème des valeurs intermédiaires

Propriétés :
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si

- **la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$**
- **les nombres réels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et non nuls (c'est-à-dire si $f(a)f(b) < 0$)**

alors la fonction f s'annule sur l'intervalle $[a, b]$: il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple:

— Faire un schema pour illustrer le théorème des valeurs intérmédiaires pour une fonction f non monotone sur $[a, b]$.

— La fonction f peut-elle s'annuler plusieurs fois sur $[a, b]$?

— Faire un schema pour illustrer le théorème des valeurs intérmédiaires pour une fonction f monotone sur $[a, b]$ avec $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Démonstration
L'idée de la démonstration repose sur le principe dit de dichotomie.
Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Nous allons construire par récurrence deux suites de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'intervalle $[a,b]$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a \leq a_n \leq b_n \leq b \qquad \text{et} \qquad f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$$

- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Alors on a bien $a_0 \leq b_0$ et $f(a_0) < 0 < f(b_0)$.
- Supposons que les nombres a_n et b_n aient été construits. On pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ (on considère le milieu du segment $[a_n, b_n]$).
  - Si $f(c_n) \leq 0$, alors on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$. On alors $f(a_{n+1}) \leq 0$ et $f(b_{n+1}) = f(b_n)$ donc positif par construction de b_n.
  - Si $f(c_n) > 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. On alors $f(b_{n+1}) > 0$ et $f(a_{n+1}) = f(a_n)$ donc négatif par construction de a_n.

  On a donc construit les nombres a_{n+1} et b_{n+1}.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ (Faire deux cas en fonction de $f(c_n)$).
2. Montrer que $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ (par récurrence ou en repérant une suite géométrique).
   La construction précédente est faite pour que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ (ce n'est pas compliqué mais fastidieux à prouver, il faut faire une récurrence pour l'hérédité il faut distinguer les cas en fonctions de $f(c_n)$).
3. Que pouvez-vous dire des variations des suites (a_n) et (b_n) ?
4. Montrer que (a_n) et (b_n) converge vers la même limite c.
5. Montrer que $c \in [a,b]$.
6. En utilisant l'inégalité $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, montrer que $f(c) \leq 0 \leq f(c)$ et donc que $f(c) = 0$.
   A quel moment dans cette question utilise-t-on la continuité de f ? et en quel point ?

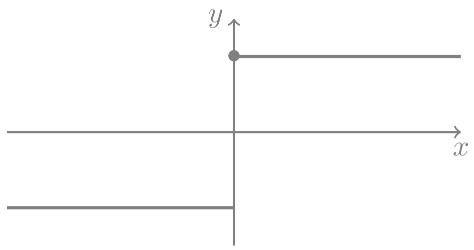
Remarque : Sur l'idée de la démonstration et la méthode de Dichotomie

- La méthode de **dichotomie** est une méthode algorithmique que l'on reverra en informatique. Elle consiste à séparer l'intervalle d'étude en deux parties, trouver sur quel demi-intervalle le point en lequel la propriété est vérifiée (ici annulation de f), puis recommencer cette procédure sur le demi-intervalle choisi. La taille de l'intervalle est ainsi divisée par 2 à chaque fois : on se rapproche de notre point.
- Cette méthode était parfois utilisée par les candidats du jeu télévisé : "le juste prix". Durant la dernière manche, le candidat devait deviner le prix d'une vitrine de cadeaux. Ce prix était un entier compris entre 10000 et 100000 euros (il y avait de beaux cadeaux). Il avait une minute pour déterminer le prix exact en faisant toutes les propositions possibles. L'animateur à chaque proposition répondait "plus" si le nombre recherché était au-dessus ou "moins" si le nombre recherché était en-dessous. La méthode de dichotomie s'applique bien à la recherche du "juste prix" et est assez naturelle.

Remarque :
L'hypothèse de continuité est fondamentale dans ce théorème. Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[-1,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

Alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[-1,1]$.



Exercice 7 : Montrer que tout polynôme P à coefficients réels de degré 3 admet au moins une racine réelle.
(Indication : On pourra poser $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et $a > 0$. Etudier la continuité de P ainsi que les limites en $-\infty$ et $+\infty$.)

Propriétés :
[Généralisation : théorème des valeurs intermédiaires.]
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout nombre réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f(c)$.

Démonstration : On suppose que $f(a) < f(b)$. Soit $y \in]f(a), f(b)[$. On introduit la fonction g définie sur l'intervalle $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - y$.

1. Justifier que g est continue.
2. Calculer $g(a)$ et $g(b)$. Que pouvez dire de leur signe ?
3. Conclure en utilisant le théorème précédent.

Remarque : Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une solution à une équation du type $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) mais il ne donne pas la valeur de cette solution et ne dit pas qu'il y a unicité de la solution.

Exemple:
Illustrons le théorème des valeurs intérmédiaires.

2) Image d'un intervalle par une fonction continue

Exercice 8 :

1. Déterminer $f(I)$ dans chacun des cas suivants (on pourra eventuellement s'aider du tableau de variation)
   (a) $f : x \longmapsto \tan(x)$ et $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
   (b) $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ et $I = \mathbb{R}$
2. De quelle nature est l'ensemble $f(I)$

Plus généralement, on a le résultat suivant (qui est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires).

Propriétés :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors $f(I)$ est un intervalle.

3) Image d'un segment par une fonction continue

On rappelle qu'un segment de $\mathbb{R}$ est un intervalle fermé borné. Par exemple, $[0, 1]$ et $[-4, 1]$ sont des segments de $\mathbb{R}$, alors que $]-\infty, 1]$ et $[0, 1[$ n'en sont pas.

Exercice 9 : Déterminer $f(I)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f : x \longmapsto \tan(x)$ et $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$
2. $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ et $I = [-1, 2]$

Quelle est la nature des ensembles obtenus ?

Propriétés :
[admis] Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a < b$),
alors l'image $f\left([a, b]\right)$ de ce segment par f est un segment.

On en déduit le résultat important suivant.

Propriétés :
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Exemple:
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Étudier la convergence de la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. En utilisant le théorème précédent, montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq M$.
2. On admet l'inégalité triangulaire pour les intégrales (On reprendra ce théorème dans un prochain chapitre), c'est à dire que pour g une fonction continue $\left|\int_0^1 g(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |g(x)|\,dx$. En déduire que
$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 x^n |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$
3. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que $0 \leq |I_n| \leq \dfrac{M}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n).

Correction exemple

1. En utilisant le théorème précédent, la fonction f étant continue sur l'intervalle $[0,1]$, elle est bornée sur cet intervalle. Il existe donc un nombre réel $M > 0$ tel que
$$\forall x \in [0,1], \qquad |f(x)| \leq M$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales,
$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 x^n |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$
3. Donc par conséquent, on a
$$0 \leq |I_n| \leq \int_0^1 x^n |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq M \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{M}{n+1}$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n+1} = 0$, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0 d'après le théorème des gendarmes.

V Bijections continues

Rappel : une application $f : I \longrightarrow J$ est dite bijective si tout élément y de J admet un unique antécédent $x \in I$ par f, c'est-à-dire

$$\forall y \in J,\ \exists!\, x \in I, \quad y = f(x)$$

On peut dans ce cas définir l'application réciproque de f, notée f^{-1} qui à tout élément y de J associe l'unique antécédent x de y dans I par l'application f.
On a donc une application $f^{-1} : J \longrightarrow I$ qui est bijective telle que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$.

Exercice 10 : Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+5}{2} \end{array} \right.$.

1. Constater que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est une application bijective et déterminer f^{-1}. (Indication : Soit $y \in \mathbb{R}$, on resout......)
3. La fonction f^{-1} est elle continue ?

1) Théorème de la bijection

Le théorème suivant assure la continuité de la réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.

Propriétés :
[de la bijection] Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que

1. **f est continue**
2. **f est strictement monotone sur l'intervalle I.**

Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. De plus, l'application réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ de f est une fonction strictement monotone sur l'intervalle J (de même monotonie que f) et continue sur cet intervalle.

Exemple:

- La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante et $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est la fonction exponentielle. C'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, continue et strictement croissante.
- La fonction $c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est continue et strictement croissante et $c(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Sa réciproque est la fonction racine carrée, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, qui est continue et strictement croissante.

Remarque : On prend une fonction f qui vérifie les hypothèses du théorème de la bijection. Soit $y \in f(I)$ on considère les solutions de $f(x) = y$.

- Le théorème de la bijection assure l'existence et l'unicité d'une solution sur I.
- L'unicité de la solution est un plus par rapport au théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple:
On ne demande que de tracer la représentation graphique des fonctions (pas leur expression).

1. Illustrer la remarque précédente à l'aide
   - d'une fonction strictement décroissante sur I avec I un segment (un intervalle de la forme [a,b])
   - d'une fonction strictement croissante sur I avec I de la forme $[a, +\infty[$.

2. Illustrer l'importance de la stricte monotonie dans le théorème en proposant :
   - un exemple pour lequel la fonction f n'est pas monotone sur I et met en défaut la conclusion du théorème (ou de la remarque).

   - un exemple pour lequel la fonction f est monotone mais pas strictement monotone et met en défaut la conclusion du théorème (ou de la remarque).

3. Finalement illustrer l'importance de la continuité en proposant un exemple pour lequel f est strictement mononotone mais pas continue et qui met en défaut la conclusion du théorème (ou de la remarque).

   Pour les 3 derniers cas quelles sont conclusions mises en défaut (injectivité de f, surjectivité de f, caractère d'intervalle de J)

   La stricte monotonie assure l'injectivité (la fonction peut ne plus être injective si on enlève cette hypothèse). La continuité assure l'existence d'une solution ce qui a trait avec la surjectivité de f mais aussi le caractère d'intervalle de $f(I)$. Quand f n'est pas continue sur I, $f(I)$ peut ne pas être un intervalle.

Remarque Attention la conclusion du théorème de la bijection ne se réduit pas dire que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution. Il fournit des informations précieuses sur la réciproque de f sur l'intervalle I (continuité et variations) sans avoir besoin d'en connaître l'expression (ce qui est parfois impossible).

Exemple:

Étudier la bijectivité de la fonction
$f : x \longmapsto x^3 + 2^x$ sur son domaine de définition (On ne cherchera pas à déterminer la réciproque car on ne sais pas le faire.....).

Solution : (Dans la rédaction ci-dessous, ce qui est en parenthèse n'est pas à mettre dans une véritable rédaction) $f : x \mapsto x^3 + 2^x = x^3 + e^{x\ln(2)}$.

- (Ensemble de définition) : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
- (Continuité et croissance stricte) : Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + \ln(2)e^{x\ln(2)} > 0$ car $\ln(2) > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 \geq 0$ et $e^{x\ln(2)} > 0$. Donc la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- (Utilisation théorème de la bijection) : D'après le théorème de la bijection f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$. On calcule les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\ln(2) > 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln(2)} = 0$. Donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et sa fonction réciproque est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

Exercice 11 :

1. Étudier la bijectivité de la fonction
   $g : x \longmapsto \dfrac{x+2}{x-2}$ sur son domaine de définition et déterminer la réciproque de la fonction g.
2. Montrer qu'il existe un unique $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x\sin(x) = 1$

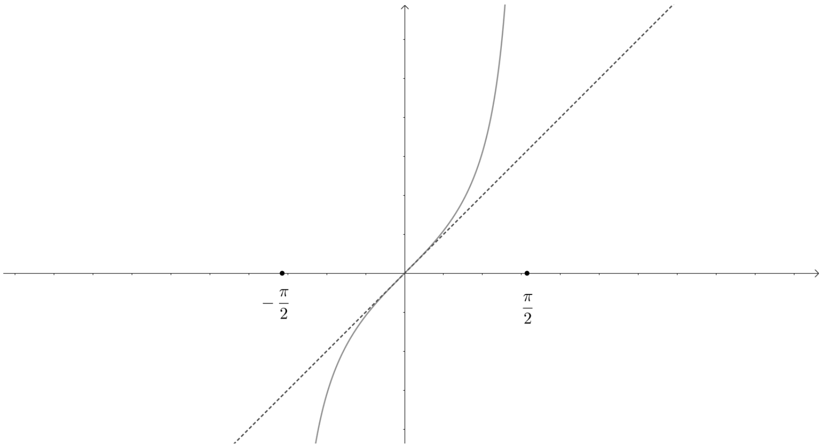
2) Réciproque de la fonction tangente (Fonction désormais classique à connaitre par coeur

On sait que la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. En particulier, elle est continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et elle est strictement croissante sur cet intervalle.
D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de cet intervalle vers

$$\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x), \lim_{x \to +\frac{\pi}{2}} \tan(x)\right[= \mathbb{R}$$

Son application réciproque est appelée fonction arctangente et est notée $\arctan$ (au lieu de $\tan^{-1}$) :

$$\arctan : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array} \right.$$



x	$-\infty$	$+\infty$
arctan		

Propriétés :
La fontion Arctan est impaire sur $\mathbb{R}$.