

TD24–Correction

Exercice 1

1. **Méthode 1** : La fonction a est la composée de la fonction \ln par la fonction \sin . La fonction \ln est définie et dérivable sur \mathbb{R}_*^+ à valeurs dans \mathbb{R} . La fonction \sin est définie et dérivable sur \mathbb{R} donc a est définie et dérivable sur \mathbb{R}_*^+ par composition.

Méthode 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$

$$a \text{ est dérivable en } x \quad \text{si} \quad \begin{cases} x \mapsto \ln(x) \text{ est dérivable en } x \\ \ln(x) \in \mathbb{R} \quad \text{puisque le sinus est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

si $x \in \mathbb{R}_*^+$

Ainsi a est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $a'(x) = \frac{1}{x} \cos(\ln(x))$

2. **Méthode 1** : La fonction f est la composée de la fonction $x \mapsto x^2 + 2x - 3$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction racine carrée est définie sur \mathbb{R}^+ et dérivable sur \mathbb{R}_*^+ . Donc pour x tel que $x^2 + 2x - 3 > 0$, la fonction f est dérivable en x par composition. Les racines de $X^2 + 2X - 3$ sont 1 et -3 donc $x^2 + 2x - 3 > 0$ pour $x \in D =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$. La fonction $x \mapsto x^2 + 2x - 3$ est dérivable sur D à valeurs dans \mathbb{R}_*^+ et la fonction racine carrée est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ . Donc f est dérivable sur D et définie sur $] - \infty, -3[\cup]1, +\infty[$ par composition.

Méthode 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f \text{ est dérivable en } x \quad \text{si} \quad \begin{cases} x \mapsto x^2 + 2x - 3 \text{ est dérivable en } x \\ x^2 + 2x - 3 \in \mathbb{R}_*^+ \quad \text{puisque la racine carrée est dérivable sur } \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$$

si $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in] - \infty, -3[\cup]1, +\infty[\end{cases}$

Ainsi f est dérivable sur $D =] - \infty, -3[\cup]1, +\infty[$ et pour tout $x \in D$, $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

Il reste à déterminer si f est dérivable en -3 et en 1. Pour cela on ne peut pas utiliser le théorème de composition. Il faut calculer la limite du taux d'accroissement en ces points : Soit $x \in] - \infty, -3[\cup]1, +\infty[$:

$$\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+3} = \frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+3|}}$$

qui tend vers $+\infty$ en -3 pour $x < -3$. Donc f n'est pas dérivable en -3 .

Notez la valeur absolue autour du $x-1$ et du $|x+3|$ puisque $\sqrt{(x+3)(x-1)} = \sqrt{|x+3| \times |x-1|} = \sqrt{|x+3|} \sqrt{|x-1|}$. On ne peut pas écrire que $\sqrt{(x+3)(x-1)} = \sqrt{x+3} \sqrt{x-1}$ car $x+3 < 0$ et $x-1 < 0$ pour $x < -3$. Par contre comme pour $x \in] - \infty, -3[\cup]1, +\infty[$, $(x+3)(x-1) \geq 0$ on a $(x+3)(x-1) = |x+3| \times |x-1|$.

$$\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+3} = \frac{\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x-1|}}$$

qui tend vers $+\infty$ en 1 pour $x > 1$. Donc f n'est pas dérivable en 1.

3. En rédigeant comme précédemment on obtient g est définie et dérivable sur $] - \infty, -1[\cup]0, +\infty[$ et pour tout $x \in] - \infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$$

4. **Méthode 1** : La fonction h est la composée de la fonction $x \mapsto 1 - 3x$ par la fonction $x \mapsto |x|$. Elle est donc définie sur \mathbb{R} . La fonction valeur absolue est dérivable sur \mathbb{R}^* et la fonction $x \mapsto 1 - 3x$ est dérivable sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ à valeur dans \mathbb{R}^* . Donc h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ par composition.

Méthode 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$

$$h \text{ est dérivable en } x \quad \text{si} \quad \begin{cases} x \mapsto 1 - 3x \text{ est dérivable en } x \\ 1 - 3x \neq 0 \quad \text{puisque la valeur absolue est dérivable sur } \mathbb{R}^* \end{cases}$$

si $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$

Ainsi h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ et

pour tout $x \in]-\infty, \frac{1}{3}[$, $h(x) = 1 - 3x$ et $h'(x) = -3$.

pour tout $x \in]\frac{1}{3}, +\infty[$, $h(x) = 3x - 1$ et $h'(x) = 3$.

Il reste à étudier la dérivabilité en $\frac{1}{3}$ à l'aide du taux d'accroissement. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.

$$\frac{|1 - 3x|}{x - \frac{1}{3}} = \begin{cases} \frac{1 - 3x}{x - \frac{1}{3}} & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ \frac{3x - 1}{x - \frac{1}{3}} & \text{si } x > \frac{1}{3} \end{cases} = \begin{cases} -3 & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ 3 & \text{si } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc la limite du taux d'accroissement de h à gauche et à droite en $\frac{1}{3}$ est différente donc la fonction n'est pas dérivable en $\frac{1}{3}$.

5. **Méthode 1 :** La fonction k est le produit de $x \mapsto e^{2x}$ (définie et dérivable sur \mathbb{R}) et de $x \mapsto \ln(1 - \sqrt[4]{x})$. Cette dernière fonction est la composée de $x \mapsto 1 - \sqrt[4]{x}$ par la fonction logarithme. La fonction logarithme est définie et dérivable sur \mathbb{R}_*^+ . La fonction $x \mapsto 1 - \sqrt[4]{x}$ est définie sur \mathbb{R}^+ . Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $1 - \sqrt[4]{x} > 0 \Leftrightarrow 1 > \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow 1 > x$ car $x \mapsto x^4$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . Donc la fonction k est définie sur $]0, 1[$. De plus la fonction $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ donc la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt[4]{x}$ est dérivable sur $]0, 1[$ à valeurs dans \mathbb{R}_*^+ . Donc la fonction $x \mapsto \ln(1 - \sqrt[4]{x})$ est dérivable sur $]0, 1[$ par composition et par produit k est dérivable sur $]0, 1[$.

Méthode 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$k \text{ est dérivable en } x \quad \text{si} \quad \begin{cases} x \mapsto e^{2x} \text{ est dérivable en } x \\ x \mapsto \ln(1 - \sqrt[4]{x}) \text{ est dérivable en } x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{si} \quad \begin{cases} x \mapsto 1 - \sqrt[4]{x} \text{ est dérivable en } x \\ 1 - \sqrt[4]{x} > 0 \quad \text{car le logarithme est dérivable sur } \mathbb{R}_*^+ \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{si} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R}_*^+ \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\text{si} \quad \{ x \in]0, 1[$$

Ainsi k est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = 2e^{2x} \ln(1 - \sqrt[4]{x}) + e^{2x} \times \frac{-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}{1 - \sqrt[4]{x}}$

Etudions la dérivabilité en 0 en étudiant la limite du taux d'accroissement en 0. Soit $x \in]0, 1[$:

$$\frac{e^{2x} \ln(1 - \sqrt[4]{x})}{x}$$

Traitons cette limite à l'aide d'un équivalent :

$$\ln(1 - \sqrt[4]{x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\sqrt[4]{x}.$$

Donc :

$$\frac{e^{2x} \ln(1 - \sqrt[4]{x})}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\sqrt[4]{x}}{x} = \frac{e^{\frac{1}{4} \ln(x)}}{e^{\ln(x)}} = e^{-\frac{3}{4} \ln(x)}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} \ln(1 - \sqrt[4]{x})}{x} = +\infty$ et k n'est pas dérivable en 0.

6. On obtient l dérivable sur $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et pour tout $x \in D$, $l'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$
7. **Méthode 1 :** La fonction m est le quotient de la fonction tangente définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et, au dénominateur, de la fonction $x \mapsto x^2 - 4$ non nul sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Donc m est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus (\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-2, 2\})$.

Méthode 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$

$$m \text{ est dérivable en } x \quad \text{si} \quad \begin{cases} x \mapsto \tan(x) \text{ est dérivable en } x \\ x \mapsto x^2 - 4 \text{ est dérivable en } x \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{si} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ x \in \mathbb{R} \\ x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \end{cases}$$

ainsi m est dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus (\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-2, 2\})$

et pour tout $x \in D$ $m(x) = \frac{(1 + (\tan(x))^2)(x^2 - 4) - \tan(x) \times 2x}{(x^2 - 4)^2}$

8. On obtient n dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et pour tout $x \in D$ $n'(x) = \frac{1}{5}(x - 3)^{-\frac{4}{5}}$

9. p est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$p'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

Exercice 2

Par composition $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* .

Par produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* , on en déduit donc que f est dérivable sur \mathbb{R}^* .

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x - 1}{x^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	e	$+\infty$

On remarque déjà que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

Regardons si la courbe admet une asymptote oblique.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 1$ (Utilisez les équivalents)

Donc la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 3

1. La fonction sinus est continue strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans $[-1, 1]$.

Elle réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$.

Elle admet alors une réciproque $g^{-1} : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto \arcsin(x) \end{cases}$

g est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $g'(x) = \cos(x)$.

Or $g'(x) = 0$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = -\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent g^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$(g^{-1})' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

or sur $] -1, 1[$, $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\arcsin(x)) + x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$$

Et comme le cosinus est positif sur l'intervalle considéré, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

$$\text{Donc } (g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. La fonction cosinus est continue strictement décroissante sur $[0, \pi]$ à valeurs dans $[-1, 1]$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

Elle admet alors une réciproque $h^{-1} : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow [0, \pi] \\ x & \mapsto \arccos(x) \end{cases}$

h est dérivable sur $[0, \pi]$ et $h'(x) = -\sin(x)$.

Or $h'(x) = 0$ sur $[0, \pi] \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$.

Par conséquent h^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$(h^{-1})' = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

or sur $] -1, 1[$, $\cos^2(\arccos(x)) + \sin^2(\arccos(x)) = 1$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$$

Et comme le sinus est positif sur l'intervalle considéré, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

$$\text{Donc } (h^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. k est définie et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

$$k'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} \leq 0$$

k est continue strictement décroissante (k' s'annule en un nombre fini de points) de $]0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[1, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[1, +\infty[$.

Elle admet donc une réciproque $k^{-1} : \begin{cases} [1, +\infty[& \rightarrow]0, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto \arcsin(\frac{1}{x}) \end{cases}$

Or $k'(x) = 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Ainsi k^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$

$$(k^{-1})'(x) = \frac{-\sin^2(k^{-1}(x))}{\cos(k^{-1}(x))} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(on procède comme dans les questions précédentes pour les simplifications)

Exercice 4

1. Notons a_0, a_2, \dots, a_n les $n+1$ réels distincts de $[a, b]$ tels que f prennent la même valeur.

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \text{ on a } f(a_k) = f(a_{k+1})$$

Montrons par récurrence que pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la proposition $\mathcal{P}_k : f^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $]a, b[$ est vraie.

Initialisation : Pour $n=1$, on sait que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $f(a_k) = f(a_{k+1})$ et que f est dérivable sur $]a, b[$ et continue sur $[a, b]$ donc pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f est dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$ et continue sur $[a_k, a_{k+1}]$. Donc d'après le théorème de Rolle f' s'annule au moins une fois dans chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ en des réels différents de a et b . Donc f' s'annule en au moins n points. Donc \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $k \leq n-1$, on suppose \mathcal{P}_k vraie et montrons que \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence $f^{(k)}$ s'annule en $n+1-k$ réels différents de a et b que l'on note b_0, b_1, \dots, b_{n-k} .

$\forall i \in \llbracket 0, n+1-k \rrbracket$, on a $f^{(k)}(b_i) = f^{(k)}(b_{i+1})$ et $f^{(k)}$ est dérivable sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$ donc pour tout $i \in \llbracket 0, n+1-k \rrbracket$, $f^{(k)}$ est dérivable sur $]b_i, b_{i+1}[$ et continue sur $[b_i, b_{i+1}]$. Donc d'après le théorème de Rolle $f^{(k+1)}$ s'annule au moins une fois dans chacun des intervalles $]b_i, b_{i+1}[$ en des réels différents de a et b . Donc $f^{(k+1)}$ s'annule en au moins $n-k$ réels de $]a, b[$. Donc \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Conclusion : Donc par récurrence $f^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $]a, b[$ est vraie. Ce qui prouve notamment la propriété de l'énoncé pour $k=n$.

2. Il faut raisonner comme à la question précédente par récurrence. En effet :

$f(a) = f(b) = 0$ avec f dérivable sur $]a, b[$ est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème de Rolle il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que $f'(c_1) = 0$.

Or f' est continue sur $]a, c_1[$, dérivable sur $]a, c_1[$ et $f'(c_1) = f'(a) = 0$. D'après le théorème de Rolle il existe $c_2 \in]a, b[$ tel que $f''(c_2) = 0$.

Ainsi de suite et finalement le résultat demandé est prouvé.

Exercice 5

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Le logarithme est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis $\exists c \in]x, x+1[$ tel que $\frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{x+1-x} = \frac{1}{c}$

Or $x < c < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ car l'inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

On en déduit donc l'encadrement demandé.

2. $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

On en déduit $x \ln(1 + \frac{1}{x}) < 1 < (x+1) \ln(1 + \frac{1}{x})$

soit encore $\ln((1 + \frac{1}{x})^x) < 1 < \ln((1 + \frac{1}{x})^{x+1}) \Leftrightarrow (1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ car l'exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 6

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $f : t \mapsto \arctan(t)$ est continue sur $[0, x]$ dérivable sur $]0, x[$ de dérivée $f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, donc d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]0, x[$ tel que :

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \frac{1}{1+c^2}$$

Puisque $0 < c < x$, on en déduit que $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$

D'où $\frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan(x)}{x} < 1$ et le résultat attendu en multipliant par $x > 0$.

2. P est continue sur $[n, n+1]$ dérivable sur $]n, n+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c_n \in]n, n+1[$ tel que :

$$\frac{P(n+1) - P(n)}{n+1 - n} = P'(c_n) \text{ Soit } P(n+1) - P(n) = P'(c_n)$$

$$\text{Or si } P(x) = x^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k x^k \text{ alors } P'(x) = dx^{d-1} + \sum_{k=1}^d k a_k x^{k-1}$$

$$\text{Ainsi } P'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} dx^{d-1}$$

Or $n < c_n < n+1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$ d'où par substitution, $P'(c_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} dc_n^{d-1}$

De plus $c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ d'où $dc_n^{d-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} dn^{d-1}$

Finalement $P(n+1) - P(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} dn^{d-1}$

Exercice 7

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[x, x+1]$.

$$\text{Ainsi } \exists c \in]x, x+1[, \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = \frac{-1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$$

Une rapide étude de la fonction $g : x \mapsto \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ montrerait qu'elle est croissante sur \mathbb{R}_+^* d'où :

$$\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{c}} < \frac{-1}{c^2} e^{\frac{1}{c}} < \frac{-1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}}$$

$$\text{Soit } \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{c}} < f(x+1) - f(x) < \frac{-1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}}$$

On obtient l'encadrement voulu en multipliant par (-1) (et en changeant le sens des inégalités).

2. En multipliant par x^2 dans l'encadrement de la question précédente, on obtient :

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} < x^2(f(x) - f(x+1)) < e^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, la limite cherchée est donc 1.

Exercice 8

1. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(x) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$ (se démontre par récurrence)

2. $h(x) = 3 + \sin(2x)$

On en déduit d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, h^{(n)}(x) = 2^n \sin(2x + \frac{n\pi}{2})$

3. $j(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})$

on pose $j_1(x) = \frac{1}{x-1}$ et $j_2(x) = \frac{1}{x+1}$

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, j_1^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ et $j_2^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, j^{(n)} = \frac{1}{2}(j_1^{(n)} + j_2^{(n)})$

4. On montre par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}, k^{(n)}(x) = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$

Exercice 9

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} où la fonction arctangente est dérivable. Ainsi par composition et par somme, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2 \times \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) \times \frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2} = 0$$

Par conséquent f est constante sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

2. La fonction inverse est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* à valeurs dans \mathbb{R}^* où la fonction arctangente est dérivable. Ainsi par composition et par somme, la fonction h est dérivable sur \mathbb{R}^* .

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = 0$$

Par conséquent h est constante sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = h(1) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_-^*, h(x) = h(-1) = \frac{-\pi}{2}$$

Exercice 10

1. Récurrence

$$2. f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = 1 + x \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Comme α est positif, on prend $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. Soit $x > \alpha$, f est continue sur $[\alpha, x]$, dérivable sur $] \alpha, x[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in] \alpha, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \leq \frac{1}{2}$

$$\text{D'où } f(x) - \alpha \leq \frac{1}{2}(x - \alpha).$$

De même pour $x \in [0, \alpha[$

f est continue sur $[x, \alpha]$, dérivable sur $]x, \alpha[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x, \alpha[$ tel que $\frac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \leq \frac{1}{2}$

$$\text{D'où } \alpha - f(x) \leq \frac{1}{2}(\alpha - x).$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\alpha\}, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

Le cas où $x = \alpha$ se vérifie immédiatement.

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

4. Récurrence.

5. Comme $|\frac{1}{2}| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ donc (u_n) converge vers α .

Exercice 11

g est \mathcal{C}^1 comme somme de fonctions \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$.

On a $g(-1) = 1, g(0) = 0$ et $g(1) = 3$

g est continue sur $[0, 1]$ avec $g(0) = 0$ et $g(1) = 3$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists a \in]0, 1[$ tel que $g(a) = 1$

g est continue sur $[-1, a]$, dérivable sur $] -1, a[$ et $g(-1) = g(a) = 1$ donc d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in] -1, a[$ tel que $g'(c) = 0$.

Exercice 12

1. Sur \mathbb{R}^* , f est continue comme composée de fonctions continues sur \mathbb{R}^* (à valeurs dans \mathbb{R}^*).

De plus $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{x^2}} = 0 = f(0)$ donc f est continue sur \mathbb{R} .

2. Sur \mathbb{R}_+^* , $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ est \mathcal{C}^∞ à valeurs dans \mathbb{R}_-^* où la fonction exponentielle est \mathcal{C}^∞ donc f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* par composition.

Même raisonnement sur \mathbb{R}_-^* .

3. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{\frac{-1}{x^2}}$$

Initialisation pour $n = 0$:

On peut poser $P_0(x) = 1$ et la formule est vérifiée.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On suppose la propriété vraie au rang n . Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{P_n'(x)x^{3n} - P_n(x) \times 3nx^{3n-1}}{(x^{3n})^2} e^{\frac{-1}{x^2}} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \times \frac{2}{x^3} e^{\frac{-1}{x^2}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(2-3nx^2)P_n + x^3 P_n'(x)}{x^3(x^{3n+1})} e^{\frac{-1}{x^2}}$$

On pose $P_{n+1}(x) = (2-3nx^2)P_n + x^3 P_n'(x)$ qui est bien un polynôme par somme et produit de polynômes.

D'après le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout n entier naturel.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n}} = 0$ De plus $\lim_{x \rightarrow 0} P_n(x) = P_n(0)$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$ donc f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Remarque : la fonction f est une fonction dont toutes les dérivées en 0 sont nulles mais qui n'est pas nulle.

Exercice 13

1. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $[n, n+1]$, dérivable sur $]n, n+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]n, n+1[$, tel que :

$$\frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n+1-n} = \alpha c^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{c^{1-\alpha}}$$

Or $n < c < n+1$

$$\text{On en déduit } \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} < \frac{\alpha}{c^{1-\alpha}} < \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

d'où l'encadrement voulu.

2. En sommant l'encadrement précédent, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha}{(k+1)^{1-\alpha}} < \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^\alpha - k^\alpha < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha}{(k)^{1-\alpha}}$$

on effectue le changement d'indice $j = k+1$

$$\text{d'où } \sum_{j=2}^n \frac{\alpha}{(j)^{1-\alpha}} < (n)^\alpha - 1 < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha}{(k)^{1-\alpha}}$$

$$\text{soit } \alpha h_n - \alpha < (n)^\alpha - 1 < \alpha h_n - \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

$$\text{Puis } \frac{n^\alpha - 1}{\alpha} + \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq h_n \leq \frac{n^\alpha}{\alpha} + 1 - \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{ou encore } 1 - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{\alpha}{n} \leq \frac{h_n}{\frac{1}{\alpha} n^\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\frac{1}{\alpha} n^\alpha} = 1$

$$\text{soit } h_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\alpha} n^\alpha$$

3. Pour $\alpha < 0$, on pourrait reprendre le même raisonnement que fait dans les deux premières questions en utilisant l'égalité des accroissements finis.

Pour montrer une inégalité du même type qu'à la question 1) on peut aussi utiliser que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [n, n+1]$

$$(n+1)^{\alpha-1} \leq x^{\alpha-1} \leq n^{\alpha-1}$$

puis en utilisant la croissance de l'intégrale :

$$(n+1)^{\alpha-1} \leq \int_n^{n+1} x^{\alpha-1} dx \leq n^{\alpha-1},$$

donc :

$$(n+1)^{\alpha-1} \leq \frac{1}{\alpha} ((n+1)^\alpha - n^\alpha) \leq n^{\alpha-1},$$

donc :

$$\alpha(n+1)^{\alpha-1} \geq (n+1)^\alpha - n^\alpha \geq \alpha n^{\alpha-1} \text{ car } \alpha < 0.$$

On somme ensuite les inégalités comme en 2) pour trouver :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha(k+1)^{\alpha-1} \geq n^\alpha - 1 \geq \alpha \sum_{k=1}^{n-1} k^{\alpha-1} \Leftrightarrow \alpha h_n - \alpha \geq n^\alpha - 1 \geq \alpha h_n - \alpha n^{\alpha-1}$$

Finalement : $h_n \leq \frac{n^\alpha - 1}{\alpha} + 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha - 1}{\alpha} + 1 = 1 - \frac{1}{\alpha}$. Ce qui veut impliquer que cette suite est bornée et majorée donc (h_n) est aussi majorée. D'autre part (h_n) est la somme de termes positifs : cette suite est donc croissante. Comme cette suite est croissante et majorée elle converge.

Exercice 14

Partie A

- On sait que les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont définies sur \mathbb{R} . La fonction th est donc bien définie au point $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $e^x + e^{-x} \neq 0$, ce qui est toujours le cas puisque la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives (et donc $e^x + e^{-x} > 0$). Donc la fonction th est définie sur \mathbb{R} .
- Si $x \in \mathcal{D}_{\text{th}} = \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathcal{D}_{\text{th}}$ donc le domaine de définition de th est symétrique par rapport à 0. Par ailleurs, on a pour tout nombre réel x ,

$$\text{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\text{th}(x)$$

On en conclut que la fonction th est impaire.

- On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ tandis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\text{th}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$.

Comme la fonction th est impaire, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$. On en déduit que :

la courbe représentative de la fonction th admet deux asymptotes horizontales, la droite d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et la droite d'équation $y = -1$ en $-\infty$.

- Pour tout nombre réel x , on a $\text{th}(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^x+e^{-x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x}) = 2 \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1 \neq 0$ donc $(e^x + e^{-x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2$ et $e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$. De plus, on sait que $e^X - 1 \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ donc, comme $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$, on a par substitution $e^{2x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$. Par quotient et produit, il vient :

$$\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^x+e^{-x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \times \frac{2x}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \text{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

- Les fonctions $x \mapsto e^x - e^{-x}$ et $e^x + e^{-x}$ sont dérivables sur \mathbb{R} (et la seconde fonction ne s'annule pas) donc la fonction th est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{th}'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

tandis que

$$1 - \text{th}(x)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

donc on a bien $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$.

Partie B

- On a montré à la question 5. de la **Partie A** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{th}(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$. Donc la fonction th est strictement croissante sur \mathbb{R} . On en déduit le tableau de variation de th :

x	$-\infty$	$+\infty$
th	-1	1

2. La fonction th est continue sur \mathbb{R} (puisque'elle est y est dérivable) et est strictement croissante sur \mathbb{R} . D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur son intervalle image

$$\text{th}(\mathbb{R}) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x)[=] -1, 1[$$

Voici son tableau de variation :

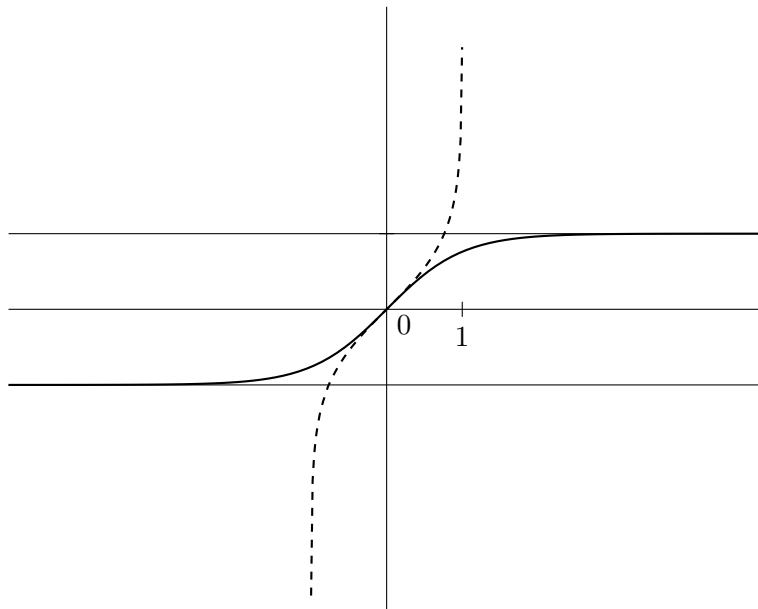
y	-1	1
Argth	$-\infty$	$+\infty$

3. D'après le théorème de la bijection, on sait que la fonction

$$\text{Argth} : \begin{cases}] -1, 1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \text{Argth}(x) \end{cases}$$

elle est continue et strictement croissante sur $] -1, 1[$.

4. La courbe représentative de la fonction Argth est en pointillés :



5. Soit $y \in] -1, 1[$. On résout l'équation $\text{th}(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \text{th}(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \iff \frac{e^x}{e^x} \times \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \\ &\iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \\ &\iff e^{2x} - 1 = (e^{2x} + 1)y \\ &\iff e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \end{aligned}$$

Donc comme la fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , on a

$$\operatorname{th}(x) = y \iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \iff x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Finalement,

$$\forall y \in]-1, 1[, \quad \operatorname{Argth}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

6. Pour calculer la dérivée de Argth , on peut ou bien utiliser l'expression obtenue dans la question précédente, ou bien utiliser le résultat concernant la dérivabilité d'une fonction réciproque (ce que nous choisissons de faire ici). On sait que th est dérivable sur \mathbb{R} et réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\operatorname{th}'(x) \neq 0$. On sait alors que la fonction $\operatorname{th}^{-1} = \operatorname{Argth}$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et, pour tout $y \in] -1, 1[$, on a

$$\operatorname{Argth}(y) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{Argth}(y))} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}(\operatorname{Argth}(y))^2} = \frac{1}{1-y^2}$$

d'où
$$\operatorname{Argth}(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

Partie C

1. ★ La fonction \cos est continue sur \mathbb{R}_- , à valeurs dans \mathbb{R} où la fonction $\sqrt[3]{\cdot}$ est continue. Par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{\cos(x)}$ est continue sur \mathbb{R}_- . Donc f est continue sur \mathbb{R}_- .
- ★ La fonction $x \mapsto \pi x^2$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , à valeurs dans \mathbb{R} où la fonction \sin est continue. Par composition, la fonction $x \mapsto \sin(\pi x^2)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, la fonction $x \mapsto x$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et ne s'annule pas donc, par quotient, la fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- ★ Il reste à étudier la continuité à droite en 0. Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. On sait que $\sin(X) \underset{X \rightarrow 0^+}{\sim} X$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \pi x^2 = 0^+$, on a par substitution, $\sin(\pi x^2) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \pi x^2$ et donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi x^2}{x} = \pi x$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \pi x = 0 = f(0)$. On en conclut donc que f est continue à droite en 0.

Finalement, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

2. ★ **Étude de la dérivabilité à droite en 0.** On veut calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$. On sait que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \pi x$ donc $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi x}{x} = \pi$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \pi$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc dérivable à droite en 0 et } f'_d(0) = \pi.}$

★ **Étude de la dérivabilité à gauche en 0.**

- ★ Pour tout $x < 0$, on a $f(x) = \sqrt[3]{1 + (\cos(x) - 1)} - 1$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) - 1) = 0$ et on sait que $\sqrt[3]{1+X} - 1 \underset{X \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{X}{3}$ donc, par substitution,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\cos(x) - 1}{3} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{6}$$

en utilisant l'équivalent usuel en zéro du cosinus. Donc $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^-}{\sim} \frac{-x}{6}$. On en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x}{6} = 0$. Donc

$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est donc dérivable à gauche en 0 et } f'_g(0) = \pi.}$

- ★ Comme la fonction f est dérivable à droite et à gauche en 0, on sait que si elle était dérivable en 0, alors on aurait $f'_d(0) = f'_g(0)$ ce qui n'est pas le cas. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 0.}}$

3. La valeur seuil est ici $x_s = 0$. Pour $\lambda = 1/3$, on a pour tout $x \in]-\infty, 0]$,

$$g_1(x) = \operatorname{th}(-3x) = -\operatorname{th}(3x)$$

et donc

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad g(x) = f_1(x)g_1(x) = -(\sqrt[3]{\cos(x)} - 1) \operatorname{th}(3x)$$

et si $x \in]0, +\infty[$, on a

$$g_2(x) = \operatorname{th}(3x)$$

et donc

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad g(x) = f_2(x)g_2(x) = \frac{\sin(\pi x^2)}{x} \operatorname{th}(3x)$$

4. ★ **Étude de la continuité.** La fonction $x \mapsto \operatorname{th}(3x)$ est continue sur \mathbb{R} . On a montré que la fonction f est continue sur \mathbb{R} . Donc les fonctions g_1 et g_2 sur leur domaines de définition respectifs (\mathbb{R}_- et \mathbb{R}_+^*). Il reste à vérifier que g est bien continue à droite en 0. On a $g(0) = -f(0) \operatorname{th}(3 \times 0) = 0$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)g_2(x) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g_2(x) \right) = 0 \times 1 = 0$$

Finalement, la fonction g est continue sur \mathbb{R} .

★ **Étude de la dérivabilité.** Le seul point qui pose problème est la dérivabilité en 0. On sait d'après la **Partie A** que $\operatorname{th}(X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ donc, comme $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$, on a par substitution $\operatorname{th}(3x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x$. Donc, si $x < 0$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -f_1(x) \times \frac{\operatorname{th}(3x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^-}{\sim} -3f_1(x)$$

et, si $x > 0$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = f_2(x) \times \frac{\operatorname{th}(3x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 3f_2(x)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$$

Finalement, la fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

5.