TD26 – Correction

Exercice 1

1. La fonction f_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions de la forme $\boxed{t \longmapsto \dfrac{(t^2+1)^6}{6} + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.
2. La fonction f_2 est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. Ce sont les fonctions de la forme $\boxed{t \longmapsto \dfrac{1}{2}(\ln(t))^2 + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.
3. La fonction f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions de la forme $\boxed{x \longmapsto \dfrac{-1}{3}\cos(x^3) + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.
4. La fonction f_4 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions de la forme $\boxed{z \longmapsto \dfrac{1}{10}(z^2-1)^5 + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.
5. La fonction f_5 est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$. On peut maintenant en déduire les primitives de f_5 sur $\mathcal{D}_{f_5}$. Comme le domaine de définition de f_5 est la réunion de trois intervalles, on cherche les primitives de f_5 sur ce domaine intervalle par intervalle. On trouve que ces primitives sont les fonctions de la forme
$$\boxed{x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(x^2-3x+2) + C_1 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{1}{2}\ln(-x^2+3x-2) + C_2 & \text{si } x \in]1, 2[\\ \dfrac{1}{2}\ln(x^2-3x+2) + C_3 & \text{si } x \in]2, +\infty[\end{cases}}$$
où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.
6. La fonction f_6 est définie et continue sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle. Ce sont les fonctions de la forme : $\boxed{x \longmapsto -\dfrac{4}{3}(2-x^2)^{3/2} + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.
7. La fonction f_7 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions de la forme : $\boxed{t \longmapsto -\dfrac{1}{6}e^{3\cos(2t)} + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.
8. La fonction f_8 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions de la forme : $\boxed{t \longmapsto -\dfrac{1}{4}\cos(4x + \dfrac{\pi}{4}) + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.
9. La fonction f_9 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Pour trouver ces primitives, on commence par linéariser $f_9(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a
$$\begin{aligned} f_9(x) &= \cos(x)^4 \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4 \quad \text{(formule d'Euler du cosinus)} \\ &= \frac{1}{16}\big(\mathrm{e}^{4ix} + 4\,\mathrm{e}^{2ix} + 6 + 4\,\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{-4ix}\big) \quad \text{(formule du binôme de Newton)} \\ &= \frac{1}{16}\big(2\cos(4x) + 6 + 8\cos(2x)\big) \quad \text{(formule d'Euler \textit{à l'envers})} \\ &= \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{3}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$
Les primitives de f_9 sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :
$$\boxed{x \longmapsto \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2x)}{4} + C}$$
où $C \in \mathbb{R}$.

10. La fonction f_{10} est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions de la forme $\boxed{x \longmapsto \arctan(e^x) + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc la primitive de f qui s'annule en 1 est $F : x \mapsto \int\limits_1^x f(t)dt$

$F(x) = \int\limits_1^x \frac{t}{(t^2+3)^5} dt = [\frac{-1}{8(t^2+3)^4}]_1^x$

$F(x) = \frac{-1}{8(x^2+3)^4} + \frac{1}{8 \times 4^4}$

2. g est continue sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dla primitive de g qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$ est $G : x \mapsto \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^x g(t)dt$

$G(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^x \tan(t)dt = \big[- \ln(|\cos(t)|)\big]_{\frac{\pi}{4}}^x$

$F(x) = -\ln(|\cos(x)|) + \ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$

3. h est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ donc la primitive de h sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en e est $H : x \mapsto \int\limits_e^x h(t)dt$

$H(x) = \int\limits_e^x \frac{1}{t\ln(t)} dt = \big[\ln(|\ln(t)|)\big]_e^x$
$H(x) = \ln(|\ln(x)|)$

Exercice 3

1. Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$ de dérivées respectives $t \longmapsto 1$ et $t \longmapsto \frac{1}{t}$. Par intégration par parties, on a donc :

$\boxed{I_1 = \big[t\ln(t)\big]_1^e - \int\limits_1^e 1 \,\mathrm{d}t = 1}$

2. Les fonctions $x \longmapsto x+1$ et $x \longmapsto e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ de dérivées respectives $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto e^x$.

Par intégration par parties, on a donc :

$\boxed{I_2 = \big[(x+1)e^x\big]_0^1 - \int\limits_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = e}$

3. Les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de dérivées respectives $x \longmapsto 2x$ et $x \longmapsto \cos(x)$. On peut donc intégrer par parties sur ce segment et on a

$$I_3 = \Big[x^2\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

et on calcule l'intégrale de droite à l'aide d'une intégration par parties. Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto -\cos(x)$ dont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc intégrer par parties sur ce segment et on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} = 1\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{I_3 = \frac{\pi^2}{4} - 2}$

4. Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \tan(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ de dérivées respectives $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \frac{1}{(\cos(x))^2}$.
   Par intégration par parties, on a donc :
   $I_4 = \left[x\tan(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$
   $I_4 = \dfrac{\pi}{4} + \left[\ln(|\cos(x)|)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$
   $\boxed{I_4 = \dfrac{\pi}{4} + \ln(\frac{\sqrt{2}}{2})}$
5. Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \arctan(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ de dérivées respectives $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.
   Par intégration par parties, on a donc :
   $I_5 = \left[x\arctan(x)\right]_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
   $I_5 = \dfrac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(|1+x^2|)\right]_0^1 \mathrm{d}x$
   $I_5 = \dfrac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$
   $\boxed{I_5 = \dfrac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)}$
6. Les fonctions $x \longmapsto \ln(1+x^2)$ et $x \longmapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2]$ de dérivées respectives $x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$ et $x \longmapsto 1$.
   Par intégration par parties, on a donc :
   $I_6 = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^2 - \int\limits_0^2 \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
   $I_6 = 2\ln(5) - \int\limits_0^2 2 - \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
   $I_6 = 2\ln(5) - \left[2x - 2\arctan(x)\right]_0^2$
   $\boxed{I_6 = 2\ln(5) - 4 + 2\arctan(2)}$

Exercice 4

1. Pour tout $t \in [0,\pi]$, on a $\cos(t) = 2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)^2 - 1$ donc
$$\sqrt{\cos(t)+1} = \sqrt{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$
   car $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et on sait que la fonction cos est à valeurs positives sur cet intervalle. Par conséquent,
$$I_1 = \sqrt{2}\int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^\pi = 2\sqrt{2}$$
2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On sait que pour tout $t \in [k, k+1[$, on a $\lfloor t \rfloor = k$ donc, d'après la relation de Chasles,
$$\begin{aligned} I_2 = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} x\lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} k\int_k^{k+1} x\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k\left[\frac{x^2}{2}\right]_k^{k+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k\times((k+1)^2 - k^2) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k(2k+1) \end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, il vient

$$\begin{aligned} I_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{4} \\ &= \frac{(n-1)n(4n+1)}{12} \end{aligned}$$

3. Pour tout $t \in [0, \pi]$, on a

$$\sin(t)^2 \cos(t)^2 = (\sin(t)\cos(t))^2 = \frac{\sin(2t)^2}{4} = \frac{1-\cos(4t)}{8}$$

Donc $I_3 = \left[\frac{t}{8} - \frac{\sin(4t)}{32}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{8}$.

4. On a

$$I_4 = \int_0^2 \mathrm{e}^{5x\ln(2)}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x(5\ln(2)+2)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{x(5\ln(2)+2)}}{5\ln(2)+2}\right]_0^2 = \frac{2^{10}\mathrm{e}^4 - 1}{5\ln(2)+2}$$

5. On commence par étudier le signe du trinôme $x^3 + x - 2$ sur l'intervalle $[0, 2]$. On remarque que 1 en est une racine évidente donc on peut le factoriser par $x - 1$: $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$. Comme $x^2 + x + 2$ est positif sur $[0, 2]$, le signe du trinôme est le même que celui de $x - 1$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^1 (-x^3 - x + 2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^3 + x - 2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

6. Pour $x \in [0, 1]$, il s'agit de déterminer le plus petit nombre réel parmi x^2 et $1 - x^2$. On résout :

$$x^2 \leq 1 - x^2 \iff 2x^2 \leq 1 \iff x^2 \leq \frac{1}{2} \iff x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

car la fonction $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ (où on résout l'équation). Par conséquent,

$$\min(x^2, 1 - x^2) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ 1 - x^2 & \text{si } x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \end{cases}$$

On utilise ensuite la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \min(x^2, 1-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \min(x^2, 1-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}/2}^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}/2} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{2}/2}^1 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2^3 \times 3} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2^3 \times 3} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Exercice 5

1. La fonction $t \longmapsto \sin(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $[0,1]$. On peut donc faire le changement de variable $x = \sin(t)$ et on a

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^2(1-\sin(t)^2)\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 x^2(1-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

2. La fonction $x \longmapsto \tan(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ à valeurs dans $[0,1]$. On peut donc faire le changement de variable $u = \tan(x)$ avec $du = (1 + (\tan(x))^2)dx = (1+u^2)dx$.
De plus $(\cos(x))^2 = \frac{1}{1+(\tan(x))^2} = \frac{1}{1+u^2}$

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+(\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{1+(\frac{u}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{u}{\sqrt{2}})\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{2}) \end{aligned}$$

3. La fonction cosinus est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ d'intervalle image $[\sqrt{2}/2, 1]$ et de dérivée la fonction $x \mapsto -\sin(x)$. On a donc

$$I_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos(x)^2}{\cos(x)^2}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1-u^2}{u^2}(-1)\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\frac{1}{u^2} - 1\right)\mathrm{d}u$$

et donc

$$I_3 = \left[-\frac{1}{u} - u\right]_{\sqrt{2}/2}^1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

4. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \ln 2]$, à valeurs dans $[1,2]$. On peut donc faire le changement de variable $z = \mathrm{e}^x$ et on a

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^2 \frac{1}{1+z^2} \\ &= \Big[\arctan(z)\Big]_1^2 \\ &= \arctan(2) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

5. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1, \mathrm{e}^\pi]$, à valeurs dans $[0, \pi]$. On peut donc faire le changement de variable $u = \ln x$. On a $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = e^{-u}\,\mathrm{d}u$
$I_5 = \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-u}\cos(u)\,\mathrm{d}u$
On calcule I_5 à l'aide de deux intégrations par parties.
Une première intégration par partie en utilisant les fonctions $u \mapsto \cos(u)$ et $u \mapsto -\mathrm{e}^{-u}, \mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donne :
$I_5 = \big[-\mathrm{e}^{-u}\cos(u)\big]_0^\pi - \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-u}\sin(u)\,\mathrm{d}u$
puis une deuxième intégration par partie en utilisant les fonctions $u \mapsto \sin(u)$ et $u \mapsto -\mathrm{e}^{-u}, \mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donne :
$I_5 = \big[-\mathrm{e}^{-u}\cos(u)\big]_0^\pi - \Big(\big[-\mathrm{e}^{-u}\sin(u)\big]_0^\pi + \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-u}\cos(u)\,\mathrm{d}u\Big)$
$I_5 = \mathrm{e}^{-\pi} + 1 - I_6$
D'où $I_5 = \frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}$

6. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, à valeurs dans $[0,1]$. On peut donc faire le changement de variable $r = \cos x$. On a $\mathrm{d}r = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$

$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+(\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{-\,\mathrm{d}r}{1+r^2} = \left[\arctan(r)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Exercice 6

1. $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto x^2$ continue sur $[0,1]$

   D'après le théorème sur les sommes de Riemann, on a :

   $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$

2. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{3k\pi}{n})$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \cos(3\pi x)$ continue sur $[0,1]$.

   D'après le théorème sur les sommes de Riemann :

   $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \cos(3\pi x)\,\mathrm{d}x = 0$

3. $v_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ continue sur $[0,1]$.

   D'après le théorème sur les sommes de Riemann :

   $\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$

4. $w_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}k^\alpha$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto x^\alpha$ continue sur $[0,1]$ (car $\alpha > 0$).

   D'après le théorème sur les sommes de Riemann :

   $\lim_{n\to+\infty} w_n = \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\alpha}$

5. $z_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$ continue sur $[0,1]$.

   D'après le théorème sur les sommes de Riemann :

   $\lim_{n\to+\infty} z_n = \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x = [\sqrt{1+2x}]_0^1 = \sqrt{3}-1$

6. $t_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{k}{n}\right)\sin\left(\dfrac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$ continue sur $[0,1]$.

   D'après le théorème sur les sommes de Riemann :

   $\lim_{n\to+\infty} t_n = \int_0^1 \frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos(2)}{4}$

7. $a_n = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto e^x\sin(\pi x)$ continue sur $[0,1]$.

   D'après le théorème sur les sommes de Riemann :

   $\lim_{n\to+\infty} a_n = \int_0^1 e^x\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(e+1)}{1+\pi^2}$ (deux intégrations par parties successives)

Exercice 7

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y'+y=0$ dont la solution générale est $y(x)=\lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x)=\lambda(x)e^{-x}$, de sorte que $y'(x)=\lambda'(x)e^{-x}-\lambda(x)e^{-x}$. On introduit ceci dans l'équation différentielle et on trouve
$$\lambda'(x)e^{-x}-\lambda(x)e^{-x}+\lambda(x)e^{-x}=\frac{1}{1+e^x}$$
Après simplification, ceci donne :
$$\lambda'(x)e^{-x}=\frac{1}{1+e^x} \Longrightarrow \lambda'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}.$$
Une solution particulière est donc donné par $y(x)=\ln\left(1+e^x\right)e^{-x}$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par
$$x \mapsto \ln\left(1+e^x\right)e^{-x}+\lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y'+y=0$, dont la solution générale est donnée par $y(x)=\frac{\lambda}{1+x}, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x)=\frac{\lambda(x)}{1+x}$, de sorte que
$$y'(x)=\frac{\lambda'(x)}{1+x}-\frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}.$$
En introduisant ceci dans l'équation différentielle, on trouve
$$(1+x)\left(\frac{\lambda'(x)}{1+x}-\frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}\right)+\frac{\lambda(x)}{1+x}=1+\ln(1+x)$$
ce qui donne après simplifications
$$\lambda'(x)=1+\ln(1+x)$$
Une primitive est donnée par $\lambda(x)=(1+x)\ln(1+x)$, et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par
$$x \mapsto \frac{\lambda}{1+x}+\ln(1+x), \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'-\frac{y}{x}=0$. On remarque que $x \mapsto x$ est une solution. Les solutions de l'équation sans second membre sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y(x)=\lambda(x)x$. Reportant dans l'équation différentielle, on trouve l'équation $\lambda'(x)=x$, ce qui donne $\lambda(x)=\frac{x^2}{2}+C$. Puisqu'on cherchait les solutions s'écrivant $\lambda(x)x$, on obtient donc que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donné par les fonctions
$$x \mapsto Cx+\frac{x^3}{2}, C \in \mathbb{R}.$$

4. On commence par résoudre l'équation homogène $y'-2xy=0$. Pour chercher une solution, on peut remarquer que si y est une solution qui ne s'annule pas,
$$y'-2xy=0 \Longleftrightarrow \frac{y'}{y}=2x \Longleftrightarrow \ln|y|=x^2+C.$$
Ainsi, ceci nous conduit à observer que $x \mapsto e^{x^2}$ est solution de l'équation homogère et donc que la solution générale de l'équation homogène est $x \mapsto \lambda e^{x^2}, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y(x)=\lambda(x)e^{x^2}$ et introduisant y dans l'équation avec second membre, on trouve
$$\lambda'(x)e^{x^2}=(-2x+1)e^x \Longleftrightarrow \lambda'(x)=(-2x+1)e^{-x^2+x}.$$
Une primitive est donnée par $\lambda(x)=e^{-x^2+x}$ et donc une solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par
$$x \mapsto e^{-x^2+x}e^{x^2}=e^x$$
Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{x^2}+e^x, \lambda \in \mathbb{R}$.

5. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{2}{t}y = 0$. On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)t^2$. L'équation devient :

$$t^2 = y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = \lambda'(t)t^2$$

Dès lors, $\lambda'(t) = 1$ soit $\lambda(t) = t + C$. Finalement, les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation de départ sont les fonctions

$$t \mapsto t^3 + Ct^2, C \in \mathbb{R}$$

6. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + x^2 y = 0$. Puisqu'une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^3}{3}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

On cherche ensuite une solution particulière. Ici, la fonction $y(x) = -1$ convient. Les solutions de l'équation $y' + x^2 y = -x^2$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto -1 + \lambda e^{-\frac{x^3}{3}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. Comme on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, on divise par $2x$ et l'équation est équivalente à $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2}$. On résout d'abord l'équation homogène $y' - \frac{1}{2x}y = 0$. Une primitive de $\frac{-1}{2x}$ est $-\frac{1}{2}\ln x = -\ln(\sqrt{x})$ et les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{\ln(\sqrt{x})} = \lambda\sqrt{x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution évidente sous la forme $y(x) = \lambda x$ (pour que tous les termes soient des monômes de degré 1). En effet,

$$2xy'(x) - y(x) = 2\lambda x - \lambda x = \lambda x$$

et donc la fonction $y(x) = x$ est solution particulière de l'équation. Finalement, toutes les solutions de l'équation sont les fonctions qui s'écrivent

$$x \mapsto x + \lambda\sqrt{x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

8. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{x}{1+x^2}y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) = -\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)} = \lambda\sqrt{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière et il est très facile de voir que la fonction $y(x) = x$ en est une. Finalement, on trouve que les solutions de l'équation différentielle $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda\sqrt{1+x^2} + x, \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 8

1. En développant et simplifiant on obtient :
$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 6n^2k + 2k^3 = 2n^4 \times \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} 3\frac{k}{n} + (\frac{k}{n})^3 = 2n^4 R_n$.
R_n est une somme de Riemann associée à la fonction $x` \mapsto 3x + x^3$ continue sur $[0, 1]$ donc :
$\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \int\limits_0^1 3x + x^3 \, dx = \frac{7}{4} \neq 0$
Ainsi $s_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{7n^4}{2}$

2. $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}\ln(2)} = n \times \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}\ln(2)} = n \times T_n$

   T_n est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto e^{x\ln(2)}$ donc :

   $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \int\limits_0^1 e^{x\ln(2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(2)} \neq 0$

   Ainsi $t_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(2)}$

3. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} = n\sqrt{n} \times \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = n\sqrt{n} \times T_n$

   T_n est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ donc :

   $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \neq 0$

   Ainsi $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2n\sqrt{n}}{3}$

4. $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+2\frac{k}{n})^3} = \frac{1}{n^2} \times T_n$

   T_n est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+2x)^3}$ donc :

   $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \int\limits_0^1 \frac{1}{(1+2x)^3}\,\mathrm{d}x = [\frac{(1+2x)^{-2}}{4}]_0^1 = \frac{2}{9} \neq 0$

   Ainsi $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{9n^2}$

Exercice 9

1. En mettant aux mêmes dénominateurs et en identifiant on trouve $a = 2$, $b = -1$ et $c = 1$.
2. $t = v^2 - 2 \Leftrightarrow v = \sqrt{t+2}$ car $t \in [2,7]$.

   La fonction $t \mapsto \sqrt{t+2}$ est est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[2,7]$, à valeurs dans $[2,3]$. On peut donc faire le changement de variable $v = \sqrt{t+2}$. On a $\mathrm{d}v = \dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2v}\,\mathrm{d}t$.

   $I = \int\limits_2^3 \dfrac{2v^2}{v^2-1}\,\mathrm{d}v$

   $I = \int\limits_2^3 2 - \dfrac{1}{v+1} + \dfrac{1}{v-1}\,\mathrm{d}v$

   $I = \big[2v - \ln(|v+1|) + \ln(|v-1|)\big]_2^3$

   $I = 2 + \ln(\frac{3}{2})$

3. $t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$.

   La fonction $t \mapsto e^t$ est est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, à valeurs dans $[1,e]$. On peut donc faire le changement de variable $x = e^t$. On a $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}t$.

   $J = \int\limits_1^e \dfrac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$

   $J = \int\limits_1^e \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

   $J = \big[\ln(|x|) - \ln(|x+1|)\big]_1^e = 1 + \ln(2) - \ln(e+1)$

Exercice 10

1. Soit $n \in [0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $1 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2$ puis, en passant au quotient, $0 \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

   Comme $x^n \geqslant 0$, il vient en multipliant par x^n :

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$$

Comme $0 \leqslant 1$, on a par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x \qquad \text{c'est-à -dire} \qquad \boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $I_n = \displaystyle\int_0^1 x \times \frac{x^{n-1}}{1+x^n} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{n} \times \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \, \mathrm{d}x$. Les fonctions $x \longmapsto \ln(1+x^n)$ et $x \longmapsto \dfrac{x}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ de dérivées respectives $x \longmapsto \dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{n}$. On peut donc intégrer par parties sur ce segment et on a

$$\boxed{I_n = \left[\frac{x\ln(1+x^n)}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x^n)}{n} \, \mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n) \, \mathrm{d}x}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut montrer que pour tout $t \in [0,1]$, on a l'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$ (*cette inégalité est en fait vraie sur* $]-1,+\infty[$: *faites-le !*). Pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^n \in [0,1]$ donc $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$. Par croissance de l'intégrale, on a (puisque $0 \leqslant 1$) :

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n) \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x \qquad \text{c'est-à -dire} \qquad \boxed{0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n) \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche un encadrement de $\frac{nI_n}{\ln 2}$. D'après la question 2., on sait que

$$\frac{nI_n}{\ln 2} = 1 - \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \ln(1+x^n) \, \mathrm{d}x$$

On utilise maintenant la question 3. où on a obtenu un encadrement de l'intégrale de droite. On obtient :

$$1 - \frac{1}{\ln(2)(n+1)} \leqslant \frac{nI_n}{\ln 2} \leqslant 1$$

D'après le théorème des gendarmes, la suite $\left(\dfrac{nI_n}{\ln 2}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite 1. Par conséquent, $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 2}{n}.}$

Exercice 11

1. $I_0 = \int\limits_0^1 e^{-x} \, \mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$

   $I_1 = \int\limits_0^1 xe^{-x} \, \mathrm{d}x = 2e^{-1} - 1$ (on utilise une intégration par parties).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $I_{n+1} - I_n = \int\limits_0^1 x^n(x-1)e^{-x} \, \mathrm{d}x$

   Or $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], x^n(x-1)e^{-x} \leq 0$

   Donc par croissance de l'intégrale, on obtient $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

   Ainsi (I_n) est décroissante.

   De plus $\forall x \in [0,1], 0 \leq e^{-x} \leq 1$ d'où $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$

   Puis par croissance de l'intégrale $0 \leq I_n \leq \int\limits_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$

   soit $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

3. (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge.
   En utilisant le théorème des gendarmes dans l'encadrement de la question précédente on montre que (I_n) converge vers 0.
4. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ de dérivées respectives $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto -e^{-x}$.
   D'après la formule d'intégration par parties on a :
   $$I_n = [\frac{x^{n+1}e^{-x}}{n+1}]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
   d'où
   $$I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$$
5. D'après la question précédente on a $neI_n = \dfrac{ne}{(n+1)e} + \dfrac{I_{n+1}ne}{n+1}$
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{ne}{(n+1)e} + \dfrac{I_{n+1}ne}{n+1} = 1$.
   Ainsi $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{ne}$.

Exercice 12

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet des primitives. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors :
   $$u(x) = F(x^2) - F(2x)$$
   Ainsi u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composées et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   $$u'(x) = 2xf(x^2) - 2f(x)$$
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet des primitives. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   $$v(x) = x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x(F(x) - F(0))$$
   Ainsi v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   $$v'(x) = F(x) - F(0) + xf(x)$$
3. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet des primitives. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   $$w(x) = [F(t+x)]_0^x = F(2x) - F(x)$$
   Ainsi w est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   $$w'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

Exercice 13

On sait que $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. et que $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.
Soit g la fonction définie pour tout $t \in [0,1]$ par $g(t) = f(t) - t$ qui est continue sur $[0,1]$.
On a alors $\int_0^1 f(t) - t\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 t\,dt = 0$.
Supposons que g ne change pas de signe et n'est pas la fonction nulle.

Par exemple si g est positive. Comme g n'est pas la fonction nulle, il existe $a \in [0,1]$ tel que $g(a) > 0$. Or g étant continue il existe un intervalle fermé $I = [c,d]$ contenant a sur $[0,1]$ tel que $\forall x \in I\ g(x) > 0$. Alors $0 < \int_c^d g(t)\,dt \leq \int_0^1 g(t)\,dt$ (la première inégalité est due à la stricte croissance de l'intégrale et la seconde à la relation de Chasles, le fait que g est positive et la positivité de l'intégrale).

On arrive à une contradiction puisque $\int_0^1 g(t)\,dt = 0$.

Donc g n'est pas positive

De même elle n'est pas négative. Donc g change de signe sur $[0,1]$, est continue sur $[0,1]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$ c'est à dire $f(c) = c$: c est un point fixe de f.

Exercice 14

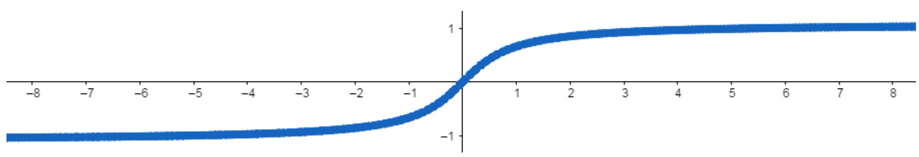
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt$. La fonction f étant $\mathcal{C}^1([a,b])$ sa dérivée est continue. Or $[a,b]$ est un segment donc f' est bornée sur $[a,b]$. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a,b]\ |f'(t)| \leq M$.
   Donc $\forall t \in [a,b]\ |f'(t)\sin(nt)| = |f'(t)||\sin(nt)| \leq M$. Puisque un sinus est compris entre -1 et 1.
   Appliquons l'inégalité triangulaire pour l'intégrale puis la croissance de l'intégrale ($a < b$) :
   $$|J_n| \leq \int_a^b |f'(t)||\sin(nt)|\,dt \leq \int_a^b M\,dt \leq (b-a)M$$
   Donc (J_n) est bornée.
2. Procédons à une intégration par parties sur I_n :
   $$I_n = \left[\frac{1}{n}f(t)\sin(nt)\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{n}f'(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{n}\left[f(t)\sin(nt)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt$$
   On a :
   $$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt\right| \leq \frac{M}{n}$$
   et
   $$\left|\frac{1}{n}\left[f(t)\sin(nt)\right]_a^b\right| = \frac{1}{n}|f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)| \leq \frac{1}{n}|f(b) + f(a)|$$
   Or les termes de droite des inégalités tendent vers 0 donc par théorème des gendarmes ceux de gauche (qui sont positifs) tendent vers 0.
   Donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. De la même façon (intégration par parties et majoration des termes) on prouve que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.

Exercice 15

1. La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\arctan(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. Montrons que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet une primitive sur G sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. Pour tout $x > 0$, on sait que $G(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et donc $F(x) = G(2x) - G(x)$ d'après la relation de Chasles. On sait que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (de dérivée f) donc F est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On procède de la même manière pour montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ (en considérant par exemple la primitive de f sur $\mathbb{R}_-^*$ s'annulant en -1). Déterminons maintenant la dérivée de F sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x > 0$, on a
   $$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2f(2x) - f(x)$$
   et on obtient la même chose sur $\mathbb{R}_-^*$.

2. Tout d'abord, le domaine de définition $\mathbb{R}^*$ de F est symétrique par rapport à 0. La fonction f est paire puisque les fonctions inverse et arctangente sont toutes les deux paires. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $F(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{\arctan(t)}{t} \mathrm{d}t$. La fonction $t \longmapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\min(-x,-2x), \max(-x,-2x)]$ et admet pour intervalle image $[\min(x,2x), \max(x,2x)]$. On peut donc faire le changement de variable $u = -t$:
$$F(-x) = \int_x^{2x} \frac{\arctan(-u)}{-u}(-1)\,\mathrm{d}u = -\int_x^{2x} \frac{\arctan(u)}{u}\,\mathrm{d}u = -F(x)$$
Donc la fonction F est impaire.
3. Soit $x > 0$. On a alors $x < 2x$. Comme la fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $t \in [x, 2x]$, les inégalités $\arctan(x) \leqslant \arctan(t) \leqslant \arctan(2x)$ et donc (comme $t > 0$,
$$\frac{\arctan(x)}{t} \leqslant \frac{\arctan(t)}{t} \leqslant \frac{\arctan(2x)}{t}$$
On utilise ensuite la croissance de l'intégrale (rappelons que $x \leqslant 2x$) :
$$\int_x^{2x} \frac{\arctan(x)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\arctan(2x)}{t}\,\mathrm{d}t$$
Or
$$\int_x^{2x} \frac{\arctan(x)}{t}\,\mathrm{d}t = \arctan(x) \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \arctan(x)(\ln(2x) - \ln(x)) = \arctan(x)\ln 2$$
En faisant la même chose pour la troisième intégrale, on obtient les estimations attendues.
4. Comme la fonction F est impaire, on a aussi :
$$\forall x < 0, \quad \ln(2)\arctan(2x) \leqslant F(x) \leqslant \ln(2)\arctan(x)$$
Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \arctan(x) = \lim_{x\to 0} \arctan(2x) = 0$, le théorème des gendarmes entraîne que F admet une limite en 0 égale à 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x) = 0$. On peut donc prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$.
On sait que pour tout $x > 0$, $F'(x) = 2f(2x) - f(x)$. Or on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ (en remarquant que f est le taux d'accroissement de la fonction arctan en 0). On peut donc prolonger F' par continuité en 0 en posant $F'(0) = 2 - 1 = 1$.
5. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. En utilisant l'encadrement obtenu à la question 3. et le théorème des gendarmes, on trouve que la fonction F admet une limite en $+\infty$ qui vaut $\dfrac{\pi \ln 2}{2}$.
6. On a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
$$F'(x) = 2\frac{\arctan(2x)}{2x} - \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x}.$$
Pour $x > 0$ $2x > x$ et par stricte croissance de la fonction arctan $\arctan(2x) - \arctan(x) > 0$. Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
D'autre part la fonction F est impaire (question 2)), elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^-$.
Enfin $F(0) = 0$ et F continue sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ et tout $y \in \mathbb{R}_*^-$: $F(y) < 0 < F(x)$.
Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Exercice 16

1. La fonction $t \mapsto t + \sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et elle s'annule seulement en 0 (car c'est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$).
   Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t+\sin(t)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
   Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, [x, 2x] \subset \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*, [2x, x] \subset \mathbb{R}_-^*$ donc l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}$ est bien définie.
   Finalement $D_G = \mathbb{R}^*$
2. $\mathbb{R}^*$ est sumétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a $G(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}$
   En utilisant le changement de variable $u = -t$ avec $t \mapsto -t$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ on obttient :
   $G(-x) = \int_x^{2x} \frac{-\,\mathrm{d}u}{-u+\sin(-u)} = G(x)$
   Ainsi G est paire sur $\mathbb{R}^*$
3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t+\sin(t)}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Notons H la primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.
   On a alors $\forall x > 0, G(x) = H(2x) - H(x)$.
   Ainsi G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.
   $\forall x > 0, G'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = \frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin(x)}$
   On procède de même sur $\mathbb{R}_-^*$ en considérant par exemple la primitive s'annulant en -1. (on obtient la même expression de la dérivée)
4. Soit $x > 1$ (on va étudier ce qui se passe en $+\infty$).
   $\forall t \in [x, 2x], 0 \leq t - 1 \leq t + \sin(t) \leq t + 1$
   Donc par passage à l'inverse qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :
   $\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{t+\sin(t)} \leq \frac{1}{t-1}$
   Puis par croissance de l'intégrale (comme $x \leq 2x$) :
   $\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$
   soit $\ln(\frac{2x+1}{x+1}) \leq G(x) \leq \ln(\frac{2x-1}{x-1})$
   Le théorème des gendarmes nous donne $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \ln(2)$

Exercice 17

1. a. Par définition, $f(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t + e^0$.
      Donc $\boxed{f(0) = 1}$
   b. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.Notons F une de ses primitives.
      On a alors : $f(x) = [F(t)]_0^x + e^x = F(x) - F(0) + e^x$.
      Or F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f et la fonction exponentielle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
      Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :
      $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = F'(x) + e^x = f(x) + e^x}$
   c. D'après la question précédente, f est donc solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $y' - y = e^x$.
      L'ensemble des solution de l'équation homagène $y' - y = 0$ est $\mathcal{S}_h = \{x \mapsto Ce^x, C \in \mathbb{R}\}$.
      Recherchons une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \alpha x e^x$.

f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_0'(x) = \alpha e^x(1+x)$.
Ainsi $f_0' - f_0 = e^x \Leftrightarrow \alpha e^x(1+x) - \alpha x e^x = e^x \Leftrightarrow \alpha = 1$ car $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
On peut donc prendre comme solution particulière $f_0(x) = xe^x$.
D'après le théorème fondamental de résolution des équations différentielles, l'ensemble des solutions de l'équation $y' - y = e^x$ est $\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^x + xe^x, C \in \mathbb{R}\}$.
Ainsi f est de la forme $x \mapsto (C+x)e^x$ avec $f(0) = 1$, ce qui impose $C = 1$.
Finalement la fonction f est définie par $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x)e^x}$

2. Réciproquement , vérifions que la fonction f trouvée ci-dessus convient.

   f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues, on peut donc définir l'intégrale $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Comme $t \mapsto 1+t$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut effectuer une intégration par parties et on obtient :
   $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [(1+t)e^t]_0^x - \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t$
   $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = (1+x)e^x - 1 - (e^x - 1)$
   $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = (1+x)e^x - e^x = f(x) - e^x$
   Finalement l'ensemble des solutions est $\boxed{x \mapsto (1+x)e^x}$