

TD26 – Correction

Exercice 1:

On a

$$P^2 = X^4 + 6X^3 + 9X^2,$$

$$P - Q = 2X - 1,$$

$$3P + Q - R = -X^3 + 4X^2 + 11X + 1$$

et

$$P^2 - Q^2 = X^4 + 6X^3 + 9X^2 - (X^4 + X^2 + 1 + 2X^3 + 2X^2 + 2X) = 4X^3 + 6X^2 - 2X - 1$$

Exercice 2:

1. On développe :

$$AB = (3X^3 + 2X^2 + X)(X^2 - X + 1) = 3X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + X$$

2. $AB = 1 + X^2 + X^3 + X^5 + X^7$

3. On a $AB = (1 + X)^n (1 - X)^n = (1 - X^2)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} X^{2k}$ d'après la formule du binôme de Newton.

Exercice 3:

1. D'après les formules de cours, $\deg(P') = 9$ et $\deg(P'') = 8$. De plus $P'(X) = 20X^9 - 45X^8 + 6X^5 - 5X^4$ et $P''(X) = 180X^8 - 360X^7 + 30X^4 - 20X^3$.
2. Pour R et S on utilise les formules du cours sur le degré d'un produit de polynômes et de ses dérivées : $\deg(R) = 20$, $\deg(S) = 10 - 7 = 3$. Pour Q on fait le calcul $Q(X) = P(X^2) = \dots$. Donc $\deg(Q) = 20$.

Exercice 4:

Le polynôme étant de degré 4 il est le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si il existe Q de degré 2 et de coefficient dominant égal à 1 ou -1 tel que $R = Q^2$.

Commençons par le cas où le coefficient dominant est égal à 1. Il existe $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $Q(X) = X^2 + cX + d$.

$$Q(X)^2 = X^4 + c^2X^2 + d^2 + 2dX^2 + 2cX^3 + 2cdX = X^4 + 2cX^3 + (c^2 + 2d)X^2 + 2cdX + d^2$$

Par identification

$$\begin{cases} 2c = 2a \\ c^2 + 2d = b \\ 2cd = 2 \\ d^2 = 1 \end{cases}$$

On a donc deux possibilités :

— $d = 1$, $c = 1$, $a = 1$ et $b = 3$

— $d = -1$, $c = -1$, $a = -1$ et $b = -1$

Traitons le cas où le coefficient dominant de Q est égal à -1 . On peut remarquer qu'alors : $-Q$ est à coefficient dominant égal à 1 tel que $(-Q)^2 = P$. Donc $-Q$ est nécessairement un des polynômes Q trouvé dans le cas précédent. On trouve donc les mêmes cas pour a et b .

On a donc deux solutions : $(a, b) = (1, 3)$ et $(a, b) = (-1, -1)$.

Exercice 5:

1. $X^2 + X + 1 = \left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

2. $X^3 - X^2 - 2X = X(X^2 - X - 2) = X(X - 2)(X + 1)$

3. $X^7 - X = X(X^6 - 1)$. Il faut maintenant factoriser $X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)$. Les polynômes $X^2 + X + 1$ et $X^2 - X + 1$ n'admettent pas de racines réelles donc $X^7 - X = X(X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)$.
4. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P_6(x) = x^8 + x^4 + 1 \geq 1$ donc le polynôme n'a pas de racines réelles.

Exercice 6:

1. 1 est racine de Q . Donc on peut factoriser Q par P .
2. Le degré de Q est inférieur au degré de P . On ne peut pas factoriser Q par P .
3. 0 est seulement racine double de Q alors que 0 est racine d'ordre de multiplicité 4 de P . Donc, on ne peut pas factoriser Q par P .
4. 2 n'est pas racine de Q . Donc, on ne peut pas factoriser Q par P .
5. -1 est racine de Q . Donc on peut factoriser Q par P .
6. -1 est racine double de Q . Donc on peut factoriser Q par P .
7. 0 n'est pas racine de Q . Donc on ne peut pas factoriser Q par P .
8. 0 et -1 sont racines de Q . Donc, on peut factoriser Q par P .

Exercice 7: P_a admet une racine réelle multiple si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P_a(x) = 0$ et $P'_a(x) = 0$.

Donc si et seulement si :

$$\begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ 7(x+1)^6 - 7x^6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ (x+1)^6 - x^6 = 0 \end{cases}$$

Remarquons que $x \neq 0$ donc le système est équivalent à :

$$\begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ (x+1)^6 = x^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ \left(\frac{x+1}{x}\right)^6 = 1 \end{cases}$$

Etant donné que $x \in \mathbb{R}$ alors $\frac{x+1}{x} \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{x+1}{x}\right)^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = 1$ ou $\frac{x+1}{x} = -1$.

Donc le système est équivalent à :

$$\begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ \frac{x+1}{x} = 1 \text{ ou } \frac{x+1}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ \frac{x+1}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{64} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

P_a admet une racine multiple si et seulement si $a = \frac{1}{64}$.

Exercice 8:

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $(1 - X)^{3n-2k} = (1 - X)^n [(1 - X)^2]^{n-k}$. Donc :

$$\begin{aligned} R(X) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - X)^n (3X)^k ((1 - X)^2)^{n-k} \\ &= (1 - X)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3X)^k ((1 - X)^2)^{n-k} \text{ par linéarité} \\ &= (1 - X)^n (3X + (1 - X)^2)^n \text{ selon le binôme de Newton} \\ &= ((1 - X)(1 + X + X^2))^n \\ &= (1 - X^3)^n \end{aligned}$$

Exercice 9:

1. A l'aide de la formule du binôme de Newton, On trouve

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k.$$

On a donc

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} X^{k-1}.$$

mais aussi :

$$P'(X) = n(1+X)^{n-1}$$

De plus, à l'aide de la formule du binôme de Newton et d'un changement d'indice, on trouve,

$$P'(X) = n(1+X)^{n-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1}.$$

De plus deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. D'où la formule.

2. D'après la formule du binôme de Newton et la formule du produit de 2 polynôme on a

$$P = ((1+X)^n)^2 = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right)^2 = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$$

avec $c_k = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n}{k-i}.$

De plus toujours d'après la formule du binôme de Newton, on a

$$P = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k.$$

Le coefficient de P correspondant à X^n est $\binom{2n}{n}$. Dans l'autre écriture le coefficient correspondant à X^n est c_n . Deux coefficients sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux donc $c_n = \binom{2n}{n}$ (et $c_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$ par symétrie des coefficients binomiaux).

Exercice 10:

1. La fonction exponentielle n'est pas polynomiale. En effet raisonnons par l'absurde.

Supposons que la fonction exponentielle est égale à un polynôme P .

Méthode 1 : Soit n son degré. On sait que la fonction exponentielle est dérivable et que sa dérivée est la fonction exponentielle. Or si P est un polynôme non constant, $\deg(P') = n-1$. Et deux polynômes ne peuvent être égaux s'ils n'ont pas le même degré. Donc la fonction exponentielle est constante. Ce qui est absurde.

Méthode 2 : On peut prouver que la limite d'un polynôme en $-\infty$ est soit $+\infty$, soit $-\infty$. Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \pm \infty$. Absurde.

2. La fonction inverse ne peut pas être polynomiale car elle n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11:

Commençons par écrire que $P(X) = X^{2022} + \sum_{i=0}^{2021} a_i X^i$ et $Q(X) = X^{2022} + \sum_{i=0}^{2021} b_i X^i$.

On va s'intéresser aux racines de $T(X) = P(X-1) - Q(X+1)$. Le polynôme T est de degré au plus 2021. En effet les monômes de degré X^{2022} et ne peuvent venir que du terme $(X-1)^{2022}$ dans $P(X-1)$ et $(X+1)^{2022}$ pour $Q(X+1)$. Or on soustrait les deux termes :

$$(X-1)^{2022} - (X+1)^{2022} = \sum_{k=0}^{2022} \binom{2022}{k} (-1)^{2022-k} X^k - \sum_{k=0}^{2022} \binom{2022}{k} X^k = \sum_{k=0}^{2021} \binom{2022}{k} (-1)^{2022-k} X^k - \sum_{k=0}^{2021} \binom{2022}{k} X^k$$

Si l'on montre que T est effectivement de degré 2021, l'exercice est terminé puisqu'un polynôme de degré impair admet nécessairement une racine réelle.

Déterminons le coefficient de degré 2021 de T . Il provient des termes de degré 2022 et 2021 de P et Q .

Pour la partie qui vient de $(X-1)^{2022} - (X+1)^{2022}$ on peut se servir du calcul précédent. On obtient :

$$-\binom{2022}{2021} X^{2021} - \binom{2022}{2021} X^{2021} = -4044 X^{2021}.$$

Il s'agit maintenant de calculer la partie qui vient du terme :

$$a_{2021}(X-1)^{2021} - b_{2021}(X+1)^{2021}$$

Une application du binôme de Newton similaire à ce qui a déjà été fait donne $(a_{2021} - b_{2021})X^{2021}$.

Donc le coefficient de degré 2021 de T est $-4044 + a_{2021} - b_{2021}$.

Pour prouver que ce coefficient est non nul on va utiliser l'hypothèse de l'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \neq Q(x)$. Le polynôme $P - Q$ n'admet pas de racine réelles. Ce polynôme est au plus de degré 2021 (puisque P et Q sont unitaires) mais ce polynôme ne peut pas être de degré 2021 car sinon il serait de degré impair et admettrait une racine réelle. Le coefficient de degré 2021 de $P - Q$ est donc nul et ce coefficient est égal $a_{2021} - b_{2021} = 0$.

Donc le coefficient de degré 2021 de T est $-4044 \neq 0$. Donc T est de degré 2021, donc de degré impair et admet donc une racine réelle : il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x-1) - Q(x+1) = 0$.

Exercice 12: En calculant les premiers polynômes, on conjecture que $P_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{2^n-1}$. On démontre cette formule par une récurrence simple.

Exercice 13:

1. En remplaçant n par 0 puis en le remplaçant par 1, on trouve $P_2 = 2X^2 - 1$ et $P_3 = 4X^3 - 3X$. D'après les premiers termes de la suite, on conjecture que pour tout entier naturel n , le polynôme P_n est de degré n . On le démontre à l'aide d'une récurrence à deux pas en notant, pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $\deg(P_n) = n$ ».
2. On conjecture que pour tout entier naturel n , le polynôme P_n est de même parité que l'entier n (c'est-à-dire que P_n est une fonction (im)paire si l'entier n est (im)pair). On le démontre à l'aide d'un raisonnement par récurrence à deux pas.

En posant $u_n = P_n(1)$ pour tout entier naturel n , on remarque que $u_0 = u_1 = 1$ et que $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux. On trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$. On en déduit ensuite que $P_n(-1) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (puisque P_n est une fonction paire si n est pair et impaire sinon).

Exercice 14:

1. On va montrer ce résultat par récurrence simple sur le degré de P . On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{R}_n$:

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = n \implies P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$, $\sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = P(0)$.

Donc $\mathcal{R}_0$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $\mathcal{R}_n$ est vraie. On montre $\mathcal{R}_{n+1}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, alors $\deg(P') = n$. On utilise l'hypothèse de récurrence sur P'

$$P'(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(P')^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(0)}{k!} X^k.$$

On peut intégrer ces fonction continue, on trouve $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(0)}{(k+1)k!} X^{k+1} + C$ avec C une constante

à déterminer. En effectuant un changement d'indice, on trouve $P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k + C$. On trouve

$C = P(0)$ en prenant $X = 0$. Donc $\mathcal{R}_{n+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = n \implies P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

2. On pose $Q(X) = P(X + a)$. On obtient

$$P(X + a) = Q(X) = \sum_{k=0}^n \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Or $\forall k \in \mathbb{N}, Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(a)$.

On a donc

$$P(X + a) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k.$$

On applique maintenant au polynôme à $X - a$. On obtient le résultat voulu.

Exercice 15:

1. Le polynôme nul vérifie clairement la relation proposée. Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ tel que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$. En prenant les degrés, on trouve que $\deg(P(X^2)) = 2 + \deg(P(X))$. Or $\deg(P(X^2)) = 2\deg(P)$ (car P ne peut pas être un polynôme constant), ce qui nous donne $\deg(P(X)) = 2$. Déterminons les polynômes de degré 2 solutions de l'équation proposée. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $P(X) = aX^2 + bX + c$. Comme deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients, on a

$$\begin{aligned} P(X^2) = (X^2 + 1)P(X) &\iff aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c \\ &\iff \begin{cases} b &= 0 \\ a + c &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les polynômes solutions de l'équation proposée sont donc les polynômes de la forme $P(X) = aX^2 - a$ où $a \in \mathbb{R}$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$. Commençons par regarder le degré de P
Si $\deg(P) \geq 2$ alors

$$\begin{aligned} \deg(P) = \deg(P') \times \deg(P'') &\iff \deg(P) = (\deg(P) - 1) + (\deg(P) - 2) \\ &\iff \deg(P) = 3 \end{aligned}$$

On cherche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ tel que

$$a(2X)^3 + b(2X)^2 + 2cX + d = (3aX^2 + 2bX + c)(6aX + 2b)$$

Par identification, on trouve le système

$$\begin{cases} 8a &= 18a^2 \\ 4b &= 18ab \\ 2c &= 4b^2 + 6ac \\ d &= 2bc \end{cases}$$

Ce système a une unique solution non nul :

$$\begin{cases} a &= \frac{4}{9} \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 0 \end{cases}$$

Il reste à étudier les cas $\deg(P) = 0$ et $\deg(P) = 1$.

Si P est constant alors on trouve $P = 0$

Si $P = aX + b$ on trouve une contradiction.

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ 0, \frac{4}{9}X^3 \right\}.$$

Exercice 16:

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Montrons que tous les scalaires λ_k ($0 \leq k \leq n$) sont nuls en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'au moins l'un d'entre eux n'est pas nul. Notons alors k_0 le plus grand entier k tel que $\lambda_k \neq 0$:

$$k_0 = \max\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket ; \lambda_k \neq 0\}$$

k_0 existe bien puisque l'on a supposé que l'un d'entre eux des λ_k est non nul et d'autre part il n'y a qu'un nombre fini et fixé λ_k (il y en a $n+1$).

On a $Q = \sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k P_k(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, k_0 - 1 \rrbracket$, on sait que $\deg(P_k) < k_0$.

Méthode 1 : D'autre part $\deg(P_{k_0}) = k_0$. Appelons α le coefficient dominant de P_{k_0} ($\alpha \neq 0$). Donc $\deg(Q) = k_0$ et le coefficient dominant de Q est $\alpha \lambda_{k_0}$. Comme Q est le polynôme nul, tous ses coefficients sont nuls et donc $\alpha \lambda_{k_0} = 0$. Or $\alpha \neq 0$ et $\lambda_{k_0} \neq 0$ par définition de k_0 . C'est absurde.

Méthode 2 : On a donc $P_k^{(k_0)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. De plus, si α désigne le coefficient dominant du polynôme P_{k_0} ($\alpha \neq 0$), alors $P_{k_0}^{(k_0)} = k_0! \alpha$. En dérivant k_0 fois l'égalité précédente, on obtient donc $\lambda_{k_0} k_0! \alpha = 0$, ce qui est absurde puisque $\lambda_{k_0} \neq 0$ par définition de k_0 et $\alpha \neq 0$.

Exercice 17:

1. En utilisant la formule du binôme de Newton et la linéarité de la somme, on trouve que

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) X^k \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - (-1)^k) X^k$$

2. On a $A(1) = B(1) = 2^n$. De plus,

$$A(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k}$$

$$\text{car } 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{tandis que}$$

$$B(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - (-1)^k) = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}$$

$$\text{car } 1 - (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}. \text{ On en déduit le résultat attendu en divisant } 2^n \text{ par } 2.$$

3. Pour tout entier pair $2k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme $X^{n-2k} (X^2 - 1)^k$ est de degré n et son coefficient dominant est 1 (on le voit en appliquant la formule du binôme de Newton à $(X^2 - 1)^k$). Donc le polynôme T_n est de degré n et son coefficient dominant est

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

4. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(X + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$$

et donc le coefficient en X^n du polynôme $(X + 1)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} (X + 1)^{2n} &= (X + 1)^n (X + 1)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left[\sum_{\ell=0}^k \binom{n}{\ell} \binom{n}{k-\ell} \right] X^k \end{aligned}$$

et donc, le coefficient en X^n du polynôme $(X+1)^{2n}$ est

$$\sum_{\ell=0}^k \binom{n}{\ell} \binom{n}{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^k \binom{n}{\ell}^2$$

par symétrie des coefficients binomiaux. On en déduit le résultat annoncé.

Exercice 18:

1. On montre (en utilisant la définition) que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On trouve que $P \in A$ si et seulement si $3a + b = 0$.
3. On montre que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. On trouve que $P \in B$ si et seulement si $b = c = 0$. Par conséquent, $B = \text{vect}(X^2)$.

Exercice 19:

1. Comme $f(0) = 1 \neq 0$, $\boxed{0 \text{ n'est pas une solution de } (E)}$.
2. D'après la question précédente, si x_0 est solution de (E) , alors x_0 est non nul donc $\frac{1}{x_0}$ est bien défini.
De plus,

$$\left(\frac{1}{x_0}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{x_0}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{x_0}\right) + 1 = \frac{1 - 5x_0 + 6x_0^2 - 5x_0^3 + x_0^4}{x_0^4} = 0$$

Ainsi $\boxed{\text{si } x_0 \text{ est solution de } (E), \frac{1}{x_0} \text{ aussi.}}$

3. On sait que $x \neq 0$ donc en divisant l'équation (E) par x^2 , on obtient l'équation équivalente (E') .

4. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\boxed{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}}$.

5. On a

$$x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \iff x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0 \iff \boxed{Y^2 - 5Y + 4 = 0} \text{ et } Y = x + \frac{1}{x}.$$

6. On factorise $Y^2 - 5Y + 4 = 0 \iff (Y - 1)(Y - 4) = 0 \iff \boxed{Y = 1 \text{ ou } Y = 4}$. Donc :

$$\begin{aligned} (E) &\iff x + \frac{1}{x} = 1 \text{ ou } x + \frac{1}{x} = 4 \\ &\iff (x^2 - x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 - 4x + 1 = 0) \\ &\iff x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } 2 - \sqrt{3} \text{ ou } 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$