

TD30 – Correction

Exercice 1

1. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (polynôme)
 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 3yx^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + x^3$
2. g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -x\}$ (quotient de polynômes)
 $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2y}{(x+y)^2}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}$
3. k est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
 $\frac{\partial k}{\partial x}(x, t) = 2x \arctan(xt) + \frac{x^2 t}{1 + (xt)^2}$ et $\frac{\partial k}{\partial t}(x, t) = \frac{x^3}{1 + (xt)^2}$
4. $m(x, y) = e^{y \ln(x)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
 $\frac{\partial m}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}$ et $\frac{\partial m}{\partial y}(x, y) = \ln(x)x^y$
5. n est $\mathcal{C}^1$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y^2 > 0\}$
 $\frac{\partial n}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x-y^2}}$ et $\frac{\partial n}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x-y^2}}$
6. h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
 $\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\frac{\cos(\theta)}{2\sqrt{r}}(1+r^2) - 2r\sqrt{r}\cos(\theta)}{(1+r^2)^2}$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{-\sqrt{r}}{1+r^2} \sin(\theta)$

Exercice 2

f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$)

Dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + y^2e^{xy^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + 2xye^{xy^2}.$$

Dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6xy + y^4e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3x^2 + 2ye^{xy^2}(1 + xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2xe^{xy^2}(1 + 2xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 3x^2 + 2ye^{xy^2}(1 + xy^2)$$

On remarque que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ (Théorème de Schwarz)

Exercice 3

1. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, $x : t \mapsto \sin(t)$ et $y : t \mapsto t^3$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
 $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sin(t), t^3) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin(t), t^3) \times y'(t)$
Or $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x-2y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2e^{x-2y}$
d'où $g'(t) = e^{\sin(t)-2t^3} \cos(t) - 2e^{\sin(t)-2t^3} \times 3t^2$
2. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, $x : t \mapsto e^t$ et $y : t \mapsto \sin(t)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
 $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(e^t, \sin(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(e^t, \sin(t)) \times y'(t)$
Or $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x$
d'où $g'(t) = (2e^t + \sin(t))e^t + (2\sin(t) + e^t)\cos(t)$

Exercice 4

1. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy - y^2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 2xy$$

$$\text{Or } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(2x - y) = 0 \\ x(x - 2y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (y=0 \text{ ou } y=2x) \text{ et } (x=0 \text{ ou } x=2y)$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

2. $f(x, 2x) = -2x^3$

on a donc $f(0, 0) = 0$ mais $f(1, 2) = -2$ et $f(-1, -2) = 2$ donc f n'a pas d'extremum.

En effet si f possédait un extremum, il serait en $(0, 0)$ mais $f(1, 2) < f(0, 0)$ et $f(-1, -2) > f(0, 0)$

3. C'est une condition nécessaire mais non suffisante.

Exercice 5

1. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 3$$

$$\text{d'où } \frac{\partial f}{\partial x}(4, 3) = 24 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(4, 3) = 13$$

2. Pour h et k proches de 0, on a :

$$f(4 + h, 3 + k) \approx f(4, 3) + 24h + 13k = 39 + 24h + 13k$$

3. $f(4, 1; 2, 9) \approx 39 + 24 \times 0,1 - 13 \times 0,1 \approx 40,1$

alors que la valeur exacte est $f(4, 1; 2, 9) = 40,049$

4. $f(4, 7; 2, 4) \approx 39 + 24 \times 0,7 - 13 \times 0,6 \approx 48$

alors que la valeur exacte est $f(4, 7; 2, 4) = 45,816$.

La valeur approchée n'est pas précise car on s'est trop éloigné du point A .

Exercice 6

1. $f(x, y)$ défini $\Leftrightarrow 1 + \frac{x}{y} > 0$ et $y \neq 0$

Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 + \frac{x}{y} > 0, y \neq 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x+y} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x}{y^2+xy}$$

Equation du plan tangent à la surface représentative de f en $(1, 1)$:

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$$

soit

$$z - \ln(2) = \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$$

On en déduit $f(1, 1; 0, 9) \approx \ln(2) + \frac{1}{2} \times 0,1 - \frac{1}{2} \times (-0,1) \approx \ln(2) + 0,1$

2. f est $\mathcal{C}^1$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 3x \neq 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{10y}{(y-3x)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-10x}{(y-3x)^2}$$

Equation du plan tangent à la surface représentative de f en $(2, 4)$:

$$z - f(2, 4) = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 4)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 4)(y - 4)$$

soit

$$z + 7 = 10(x - 2) - 5(y - 4)$$

On en déduit $f(2, 1; 3, 9) \approx -5, 5$

Exercice 7

1. $f(0, 0) = 0, f(-1, 0) = 5, f(1, 1) = 0$ et $f(2, -1) = -5$.

2. On trouve $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 5$

Ainsi $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq -5$.

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} z = f(x, y) \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \\ z = 4 \end{cases}$

Ainsi dans le plan $z = 4$ la projection de (S) est le cercle de centre $(2, -1)$ de rayon 3.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} z = f(x, y) \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1 \\ z = -4 \end{cases}$

Ainsi dans le plan $z = -4$ la projection de (S) est le cercle de centre $(2, -1)$ de rayon 1.

4. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 - 4x \\ y = 0 \end{cases}$

Ainsi l'intersection de (S) et du plan d'équation $y = 0$ est une parabole.

Exercice 8

1. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On obtient $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(y)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (x, y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} \sin(y) = 0 \\ x \cos(y) = 0 \end{cases}$

On obtient donc $(x, y) \in \{(0, k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$

2. g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On obtient $\frac{\partial g}{\partial x} = 9x^2y - 2y$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = 3x^3 - 2x$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (x, y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} y(9x^2 - 2) = 0 \\ x(3x^2 - 2) = 0 \end{cases}$

On obtient donc $(x, y) \in \{(0, 0), (\sqrt{\frac{2}{3}}, 0), (-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)\}$

3. h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On obtient $\frac{\partial h}{\partial x} = -2xye^{-x^2-y^2}$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = (1 - 2y^2)e^{-x^2-y^2}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (x, y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} 2xy = 0 \\ 1 - 2y^2 = 0 \end{cases}$ car l'exponentielle est strictement positive.

On obtient donc $(x, y) \in \{(0, \sqrt{\frac{1}{2}}), (0, -\sqrt{\frac{1}{2}})\}$

Exercice 9

1. $f(x, y) = \phi(y)$

2. $f(x, y) = C \in \mathbb{R}$

3. $f(x, y) = xe^y + \phi(y)$

4. $f(x, y) = e^x + \phi(y)$

5. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3f(x, y) = 0$ donc $f(x, y) = \phi(y)e^{3x}$
6. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \phi(y)$
d'où $f(x, y) = \frac{1}{6}x^3y + \phi(y)x + g(y)$
7. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{y} + x + \phi(y)$
d'où $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 \ln(y) + xy + F(y)$ où F est une primitive de ϕ .
8. $f(x, y) = \sin(x) + \phi(y)$
mais $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(y) = \phi'(y)$ donc $\phi(y) = \sin(y) + C$ où $C \in \mathbb{R}$
Finalement $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + C$

Exercice 10

1. $H'(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t)$
 $H'(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \times (ax - bxy) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \times (-cy + dxy)$
2. Or $\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \frac{c}{x} - d$ et $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \frac{a}{y} - b$.
D'où $H'(t) = (\frac{c}{x} - d)(ax - bxy) + (\frac{a}{y} - b)(-cy + dxy) = 0$.

Par conséquent H est constante au cours du temps. Il y a donc une situation d'équilibre qui se met en place entre le nombre de proies et le nombre de prédateurs.

Exercice 11

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = -cu'_0(x - ct)$
 $\frac{\partial u}{\partial x} = u'_0(x - ct)$
2. On a donc $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = -cu'_0(x - ct) + c \times u'_0(x - ct) = 0$
On en déduit que u est bien solution de (1).
3. $u(0, x) = u_0(x)$.

Ainsi la fonction $x \mapsto u_0(x)$ correspond à la valeur de u au temps initial $t = 0$, d'où son nom de condition initiale.

4. On a :

$$u_0(x) = u(0, x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(x)$$

$$u(1, x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(x - 1)$$

$$u(2, x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(x - 2)$$

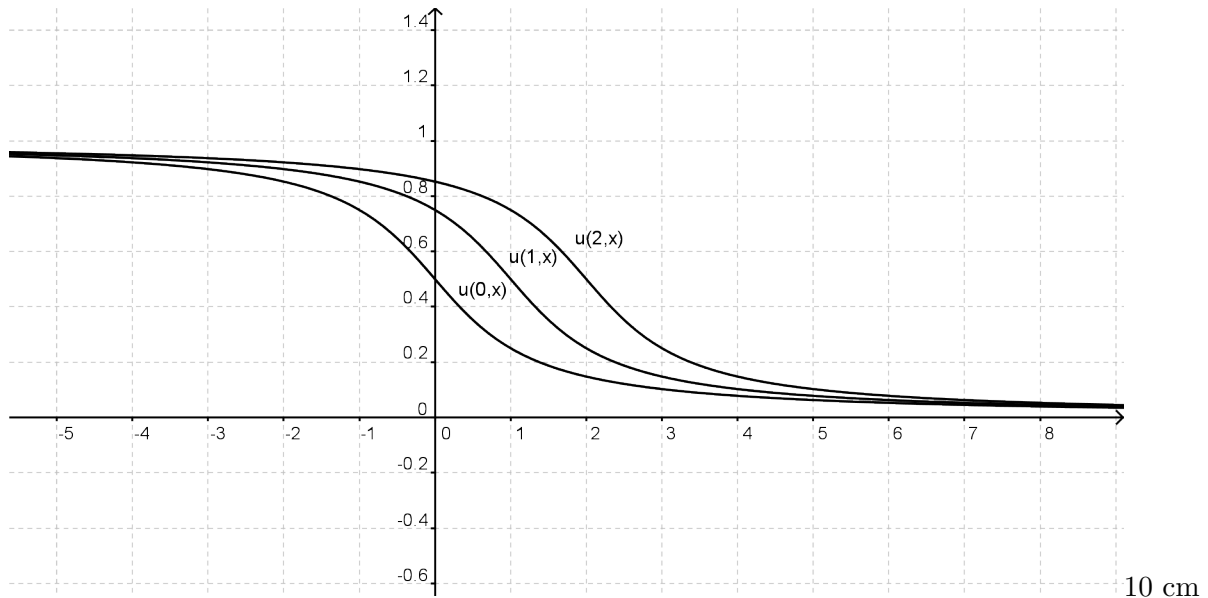
Ces trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ strictement décroissante et telles que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(0, x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(1, x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(2, x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(0, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} u(1, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} u(2, x) = 0$$

$$\text{On a de plus } u(0, 0) = \frac{1}{2}, u(1, 0) = \frac{3}{4}.$$

On obtient le graphique suivant :



On constate que plus le temps augmente, plus l'information se translate vers les x croissants. Ainsi quand t augmente, le signal se déplace dans le sens des x croissant. D'où le nom d'équation de transport.

Exercice 12

- Les solutions constantes vérifient $y^2 = 0$ et $\sin(x) = 0$. Donc $(x, y) \in \{(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}\}$
- (a) $\phi : t \mapsto \phi(t)$ est constante si et seulement si sa dérivée est nulle.

C'est à dire :

$$\begin{aligned}\phi'(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) \times y^2 + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) \times \sin(x) = 0\end{aligned}$$

- (b) Pour $V(x, y) = \cos(x) + \frac{y^3}{3}$, on a $\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = -\sin(x)$ et $\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = y^2$

Ainsi $\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) \times y^2 + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) \times \sin(x) = -\sin(x) \times y^2 + y^2 \times \sin(x) = 0$ donc V vérifie la condition précédente.

- (a) D'après la question précédente, on a $t \mapsto \cos(x(t)) + \frac{(y(t))^3}{3}$ constante.

$$\text{D'où } \forall t \in \mathbb{R}, \cos(x(t)) + \frac{(y(t))^3}{3} = \cos(x(0)) + \frac{(y(0))^3}{3} = 1 + \frac{-6}{3} = -1$$

- (b) On obtient $y = -\sqrt[3]{3(1 + \cos(x))}$

