Semaine n°2 du 23 septembre au 27 septembre

Logique et ensembles

- Proposition ou assertion : définition, exemples.
- opérateurs : NON, ET, OU, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.
- Négation du ET ou du OU :

$$\text{Non}(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow \text{Non}(P) \text{ ou } \text{Non}(Q)$$

$$\text{Non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \text{Non}(P) \text{ et } \text{Non}(Q)$$

- Distributivité :

$$(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \Leftrightarrow (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$$
$$(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \Leftrightarrow (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$$

- Ensembles : notations $\varnothing$, $\in$, $\subset$, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Méthode de démonstration pour montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre, ou que deux ensembles sont égaux.
- Parties d'un ensemble, notation $\mathcal{P}(E)$.
- Opérations sur les ensembles : union et intersection (associative, commutative, distributivité), complémentaire, lois de De Morgan.
- Produit cartésien : définition.
- Quantificateurs : $\forall, \exists, \exists!$, négation des quantificateurs.
- Différents types de démonstration :
  — Raisonnement direct
  — Raisonnement par contraposée
  — Raisonnement par disjonction de cas
  — Raisonnement par l'absurde
  — Utilisation d'un contre exemple
  — Récurrence simple (le symbole Σ n'est pas maitrisé), récurrence à deux pas, récurrence forte.

Nombres réels

- Définitions : intervalles de $\mathbb{R}$, segment, majorant, minorant, plus grand et plus petit élément, borne supérieure et borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.
- Valeur absolue d'un nombre réel : définition et propriétés ($|x| = \alpha, |x| \leq \alpha, |x| \geq \alpha, |xy|$, $\frac{|x|}{|y|}$, inégalités triangulaires)
- Partie entière d'un nombre réel : définition, opérations (Les puissances non entière n'ont pas été traitées.)
- Puissance entière et la racine carrée : définition, opérations.
- Identités remarquables : $(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b)$.
- Résolution d'équations :
  — Règles de transformation pour obtenir une équation équivalente, cas de la composition par une fonction strictement monotone.
  — Equation produit.
  — Résolution dans $\mathbb{R}$ d'équation du second degré.
  — Equations nécessitant la recherche d'un domaine de validité seulement avec la racine carrée. (Le logarithme n'est pas connu de tous.)
  (cf exemple)

Remarques aux colleurs

- Veillez à ce que les récurrences soit particulièrement bien rédigées (cf exemple en annexe).
- Les élèves ont des difficultés en calcul. Il ne faut pas hésiter pas à mettre en question de cours des simplifications de fractions ou de puissances.
- Merci d'être exigeant sur la rédaction des résolutions d'équations et inéquations (cf exemple en annexe)

Exemple de rédaction pour une récurrence

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, "$2^n > n$".
Pour $n \in \mathbb{N}$, note $\mathcal{R}(n)$ la propriété : "$2^n > n$".

Initialisation pour $n = 1$:
$2^1 = 2$ et on a bien $2 > 1$ donc $\mathcal{R}(1)$ est vraie.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
On suppose que $\mathcal{R}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $2^n > n$
Or $2^n > n \Leftrightarrow 2 \times 2^n > 2n \Leftrightarrow 2^{n+1} > n + n$
Or $n \geq 1$, on en déduit donc :
$2^{n+1} > n + 1$
On a montré que $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie

D'après le principe de récurrence (ou par récurrence), $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n > n$.

Exemple de rédaction pour une résolution d'équation

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+2} = x - 4$

Etude du domaine de validité de l'équation :
Soit $x \in \mathbb{R}$ L'équation est valide si et seulement si $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.
On résout l'équation sur $[-2, +\infty[$.

Soit $x \in [-2, +\infty[$,

1er cas : Si $x \in [-2, 4[$,
alors $x - 4 < 0$.
Dans ce cas l'équation n'a pas de solution puisqu'une racine carrée est un nombre positif.

2eme cas : Si $x \in [4, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2} = x - 4 \quad &\Leftrightarrow \quad x + 2 = (x-4)^2 \text{ car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
&\qquad\qquad \text{avec } \sqrt{x+2} \in \mathbb{R}_+ \text{ et } x - 4 \in \mathbb{R}_+. \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 14 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-2)(x-7) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ ou } x = 7
\end{aligned}$$

Seule la solution 7 est valide car $2 < 4$.
L'ensemble des solutions de l'équation est sont $\mathcal{S} = \{7\}$.