TD03 – Correction

Exercice 1:

1. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
   $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,
   $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
   $\sin\left(\frac{16\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{4\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
   $\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
   $\cos\left(-\frac{5\pi}{6} + k\pi\right) = (-1)^k \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = (-1)^k \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = (-1)^k \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -(-1)^k \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = (-1)^{k+1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\alpha = \frac{3\pi}{4} \mod 2\pi$ car :

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\alpha) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\alpha) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin(\alpha) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

   De la même façon $\beta = \frac{5\pi}{6} \mod 2\pi$, $\gamma = \pi \mod 2\pi$ et, en utilisant la formule de duplication du sinus,

$$\begin{cases} \cos(2\delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(4\delta) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(2\delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(2\delta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(2\delta) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin(2\delta) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos(2\delta) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin(2\delta) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\iff 2\delta = -\frac{\pi}{4} \mod 2\pi$$

$$\iff \delta = -\frac{\pi}{8} \mod \pi$$

Exercice 2: Pour chaque équation, on notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou} \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou} \\ 2x = -\frac{3\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou} \\ x = -\frac{3\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donc $\mathcal{S} = \left\{ -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2. $\mathcal{S} = \varnothing$ car $-\dfrac{4}{3} < -1$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
2\sin(5x) = -\sqrt{2} &\Leftrightarrow \sin(5x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow \sin(5x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \sin(5x) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } 5x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ -\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z} \right\}$, $\tan(2x) = 1 \Leftrightarrow \tan(2x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Donc $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ car $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z} \right\}$,
$\tan(3x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(3x) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \tan(3x) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 3x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$. Donc $\mathcal{S} = \left\{ -\dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{\pi}{3}, \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$
6. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sin(7x) = \sin(6) &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } 7x = \pi - 6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{7} + \dfrac{2k\pi}{7},\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = \dfrac{\pi - 6}{7} + \dfrac{2k\pi}{7},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ \dfrac{6}{7} + \dfrac{2k\pi}{7},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \dfrac{\pi - 6}{7} + \dfrac{2k\pi}{7},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sin(5x) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) &\Leftrightarrow \sin(5x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \sin(5x) = \sin\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{10\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \sin(5x) = \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } 5x = \pi + \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7\pi}{30} + \dfrac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = \dfrac{13\pi}{30} + \dfrac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ -\dfrac{7\pi}{30} + \dfrac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \dfrac{13\pi}{30} + \dfrac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

8. Le principe est le même que pour la question 1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos(4x) \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2\pi}{3} = 4x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou} \\ x+\dfrac{2\pi}{3} = -4x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou} \\ 5x = -\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou} \\ x = -\dfrac{2\pi}{15}+\dfrac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Remarque on aurait dû trouver $-\dfrac{2k\pi}{3}$ pour la première ligne mais comme $k\in\mathbb{Z}$, on retrouve bien les mêmes solutions.
Donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{2\pi}{15}+\dfrac{2k\pi}{5}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

9. On commence par résoudre l'équation du second degré $2x^2+3x+1=0$ (on fait le changement de variable $x=\cos(\theta)$). On trouve deux racines réelles distinctes : -1 et $-\frac{1}{2}$. Donc θ est solution de l'équation initiale si et seulement si $\cos(\theta)=-1=\cos(\pi)$ ou $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}=-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$.
On trouve que

$$\mathcal{S}=\{(2k+1)\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 3: Pour chaque équation, on notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1. On réduit l'expression $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)$ en un cosinus. On trouve que

$$\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

L'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

2. On a $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\pi}{12}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

3. En utilisant l'égalité en 2) : $\mathcal{S}=2\pi\mathbb{Z}\cup\left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

4. On a $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. Donc $\mathcal{S}=\pi\mathbb{Z}\cup\left\{\dfrac{-\pi}{3}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

5. En utilisant la formule de duplication du sinus, on trouve que l'équation est équivalente à $\cos(x)(1-2\sin(x)^2)=0$. On trouve que l'ensemble de solutions est

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

6. On utilise la formule de duplication du cosinus. L'équation est équivalente à $\cos(x)(2\cos(x)+1)=0$. L'ensemble de solutions est

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 4:

Il faut toujours faire un schéma pour résoudre les inéquations.
Pour chaque inéquation, on notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1. (a) Résoudre sur $[-\pi, \pi[$ l'inéquation , $\sin(x) < -\dfrac{1}{2}$.
   Dessin
   Soit $x \in [-\pi, \pi[$,
$$\sin(x) < -\frac{1}{2} \iff x \in \left]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right[.$$
   (b) La résoudre ensuite sur $\mathbb{R}$.
   Pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$, il suffit de reprendre le problème avec les modulos.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\sin(x) < -\frac{1}{2} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[.$$
   Conclusion : $\mathcal{S} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[$
2. (a) Résoudre pour $2x \in [-\pi, \pi[$ l'inéquation , $\cos(2x) > 0$.
   Dessin
   Soit $2x \in [-\pi, \pi[$,
$$\begin{aligned}\cos(2x) > 0 &\iff 2x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ &\iff x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[.\end{aligned}$$
   (b) La résoudre ensuite sur $\mathbb{R}$.
   Pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$, il suffit de reprendre le problème avec les modulos.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\cos(2x) > 0 &\iff 2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\\ &\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right[.\end{aligned}$$
   Conclusion : $\mathcal{S} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right[$.
3. (a) Résoudre pour $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation , $1 < \tan(x) \leq \sqrt{3}$.
   Dessin
   Soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$,
$$1 < \tan(x) < \sqrt{3} \iff x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ tangente est strictement croissante sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$
   (b) La résoudre ensuite sur $\mathbb{R}$.
   Pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$, il suffit de reprendre le problème avec les modulos.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$1 < \tan(x) < \sqrt{3} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right].$$
   Conclusion : $\mathcal{S} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\sin^2(x) + 3\cos(x) - 1 &= 1 - \cos^2(x) + 3\cos(x) - 1\\ &= \cos(x)(3 - \cos(x))\end{aligned}$$
   L'équation devient $\cos(x)(3 - \cos(x)) < 0$.
   Or comme $\forall x \in \mathbb{R}, 3 - \cos(x) > 0$. L'équation est équivalente à $\cos(x) < 0$.
   Conclusion : $\mathcal{S} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$

5. On commence par transformer la somme des cosinus et sinus.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right)\\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)\\ &= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

   L'équation est équivalente à $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$.

   (a) Résoudre pour $x - \frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi[$ l'inéquation , $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$.
   Dessin
   Soit $x - \frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi[$,

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2} &\iff x - \frac{\pi}{6} \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[\\ &\iff x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right[\end{aligned}$$

   (b) La résoudre ensuite sur $\mathbb{R}$.
   Pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$, il suffit de reprendre le problème avec les modulos.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right[$$

   Conclusion : $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right[$

6. En raisonnant comme la précédente inéquation et en faisant attention que le $2x$ donne des modulos π et pas 2π, on trouve :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{24} + k\pi, \frac{5\pi}{24} + k\pi\right[.$$

Exercice 5: Comme $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a $1 + \cos(x) \neq 0$, $\sin(x) \neq 0$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini car $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$. Pour la première égalité on utilise la formule fondamentale : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = (1 - \cos(x))(1 + \cos(x))$. D'où la première égalité. Pour la deuxième égalité, on utilise les formules de duplication : $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$.

Exercice 6:

1. On utilise la formule de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1$ avec $\theta = \frac{\pi}{8}$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, on trouve que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
2. On trouve que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 7:

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$. On a

$$1 + \tan(x)^2 = 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin(t) &= \sin\left(2 \times \frac{t}{2}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2\tan\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= 2\frac{1}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right))^2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= \cos\left(2\frac{t}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\\
&= \cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}\left(1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)\\
&= \frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 8:

1. Si $(a,b) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[^2$, on a $0 \leqslant a+b < \frac{\pi}{2}$ donc $\tan(a+b)$ existe ainsi que $\tan(a)$ et $\tan(b)$. On utilise ensuite l'expression de la tangente en fonction du sinus et du cosinus et les formules d'addition du sinus et du cosinus.
2. Posons $a = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ et $b = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. On a $(a,b) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[^2$.

   En effet, $\tan(a) = \frac{1}{2}$ donc $\tan(0) \leqslant \tan(a) < \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ puis on utilise le fait que la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ (de même pour b).

   En utilisant la question 1., on trouve que $\tan(a+b) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Donc $\arctan(\tan(a+b)) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Mais on n'oublie pas que $\arctan(\tan(x)) = x$ seulement si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Il faut donc prouver que $a+b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mais $a+b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (car $(a,b) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]^2$) et $\frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. D'où le résultat.

Exercice 9:

1. On se souvient que toutes les images de arcsin et arctan doivent être dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, l'intervalle étant ouvert pour arctan. $\sin(\arcsin(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$, $\arcsin(\sin(\pi)) = 0$, $\arcsin(\sin(\frac{17\pi}{3})) = -\frac{\pi}{3}$, $\arcsin(\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin(\sin(10)) = 3\pi - 10$ et $\arctan(-\tan(\frac{143\pi}{6})) = \frac{\pi}{6}$
2. On utilise la formule de duplication du sinus et on trouve que $\sin(2\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$ (on a $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ car $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$). Montrons que pour $x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin(x)) =$

$\sqrt{1-x^2}$. Soit $x \in [-1,1]$,

$$\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\arcsin(x)) + x^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$$

donc $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1-x^2}$. Or $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$. Donc $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 10:

1. Cette question est théorique, mais la méthode est la même. On factorise par $\sqrt{B^2+C^2}$. et on utilise la formule du cosinus d'une somme.
   Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $u(t) = \sqrt{B^2+C^2}\Big(\frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}}\cos(\omega t) + \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}\sin(\omega t)\Big)$.
   Comme $\Big(\frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}\Big)^2 = 1$, il existe un angle $\Phi \in [0\ ;\ 2\pi]$ tel que $\cos(\Phi) = \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}}$ et $\sin(\Phi) = -\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}$.
   On obtient
   $$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{B^2+C^2}\Big(\cos(\Phi)\cos(\omega t) - \sin(\Phi)\sin(\omega t)\Big) && (1)\\ &= \sqrt{B^2+C^2}\cos(\omega t + \Phi) && (2)\end{aligned}$$
   On pose $A = \sqrt{B^2+C^2}$.
2. La fonction u est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$. En effet, soit $k \in \mathbb{Z}$,
   $$\cos(\omega(t + k\frac{2\pi}{\omega}) + \Phi) = \cos(\omega t + 2k\pi + \Phi) = \cos(\omega t + \Phi).$$
3. La période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et la fréquence est $f = \frac{\omega}{2\pi}$.
4. $$\begin{aligned} U_{eff}^2 &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} A^2(\cos(\omega t + \Phi))^2\ dt && (3)\\ &= \frac{A^2\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\cos(2\omega t + \Phi) + 1}{2}\ dt \quad \text{linéarisation de } cos^2 && (4)\\ &= \frac{A^2\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\cos(2\omega t + \Phi)}{2} + \frac{1}{2}\ dt && (5)\\ &= \frac{A^2\omega}{2\pi}\left[\frac{\sin(2\omega t + \Phi)}{4\omega} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} && (6)\\ &= \frac{A^2\omega}{2\pi}\frac{\pi}{\omega} && (7)\\ &= \frac{A^2}{2} && (8)\end{aligned}$$
5. Les données de l'énoncé permettent d'obtenir le système suivant,
   $$\begin{cases} \frac{\omega}{2\pi} &= 50\\ \frac{A^2}{2} &= 220\end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} \omega &= 100\pi \\ A &= \sqrt{110} \end{cases}$$

Exercice 11:

1. $HH' = \tan(\alpha_v)AH'$ et $HH' = \sin(\alpha_v)AH$.
2. (a) La hauteur issue de C divise le triangle ABC en deux triangles rectangles. Notons h cette hauteur.
   $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$ et $\sin(\beta) = \frac{h}{a}$.
   D'où
   $$h = b\sin\alpha = a\sin\beta$$
   et donc :
   $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$
   En faisant de même avec la hauteur issue de A on obtient :
   $$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$
   (b) Comme $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$, d'après la règle des sinus on trouve,
   $$a = c\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ et } b = c\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$
3. On applique le résultat précédent dans le triangle ABH. (Attention : $\beta = \pi - \beta_v$. On obtient
   $$AH = AB\frac{\sin(\beta_v)}{\sin(\beta_v - \alpha_v)}.$$
   Et par conséquent, on a
   $$HH' = \sin(\alpha_v)AH = AB\frac{\sin(\beta_v)\sin(\alpha_v)}{\sin(\beta_v - \alpha_v)}.$$

Exercice 12:

1.
```
from math import cos
def ProcheZero(eps,theta):
    n=0
    while  cos(theta)**n<-eps or eps<cos(theta)**n:
       n=n+1
    return n
```

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
   $$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0 \iff x(16x^4 - 20x^2 + 5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$$
   Or :
   $$\begin{aligned} 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0 &\iff 16y^2 - 20y + 5 = 0 \qquad \text{(en posant } y = x^2) \\ &\iff y = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \text{ ou } y = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \\ &\iff x^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \text{ ou } x^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \\ &\iff x = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \end{aligned}$$
   Finalement,

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (\star) \text{ est } \left\{0, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right\}}$$

3. (a) D'après la relation obtenue à la question 1.(b), on a :

$$16\alpha^5 - 20\alpha^3 + 5\alpha = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

donc $\boxed{\alpha \text{ est solution de l'équation } (\star)}$.

(b) Comme $\frac{\pi}{10} \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \in \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos(0)\right]$ car la fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$, c'est-à -dire $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$. Comme $\sqrt{5} > 2$, on a $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ puisque $\sqrt{2} > 1$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est solution de $(\star)$ donc on peut conclure que :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}.$$

(c) Pour déterminer $\sin(\frac{\pi}{10})$. On utilise que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.
Donc en utilisant la strict croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $|\sin(\theta)| = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$.
D'où $\sin(\frac{\pi}{10}) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{\pi}{10})}$ ou $\sin(\frac{\pi}{10}) = -\sqrt{1 - \cos^2(\frac{\pi}{10})}$

Comme $\sin(\frac{\pi}{10}) > 0$, on trouve $\sin(\frac{\pi}{10}) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{\pi}{10})} = \sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

(d) En utilisant la formule de duplication du cosinus on trouve
$\cos(\frac{\pi}{5}) = \cos(2\frac{\pi}{10}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{10}) - 1 = 2\frac{5+\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
Utilisons maintenant la formule de duplication du sinus

$\sin(\frac{\pi}{5}) = \sin(2\frac{\pi}{10}) = 2\cos(\frac{\pi}{10})\sin(\frac{\pi}{10}) = 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}\sqrt{3+\sqrt{5}}$

(e) On obtient $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$.
Or $\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5})$,
D'ou $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \sin(\frac{\pi}{10}) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$ et $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{10}) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$